



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 7.5: Método *Branch-and-Bound*: resolução das relaxações lineares
por inspeção

Apresentação - Tópico 7.5

Objetivos deste tópico:

- ▶ Continuar o estudo do método *branch-and-bound*: Entender como resolver as relaxações lineares do problema da mochila por inspeção.

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução por inspeção

- ▶ Até o momento, vimos que a relaxação linear de qualquer modelo de programação inteira pode ser resolvida pelo método gráfico e pelo método simplex (por ser um modelo de programação linear);

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução por inspeção

- ▶ Até o momento, vimos que a relaxação linear de qualquer modelo de programação inteira pode ser resolvida pelo método gráfico e pelo método simplex (por ser um modelo de programação linear);
- ▶ Em alguns casos específicos, também é possível resolvê-la por algoritmos especializados, que são mais simples e ainda assim nos garantem a solução ótima;

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução por inspeção

- ▶ Até o momento, vimos que a relaxação linear de qualquer modelo de programação inteira pode ser resolvida pelo método gráfico e pelo método simplex (por ser um modelo de programação linear);
- ▶ Em alguns casos específicos, também é possível resolvê-la por algoritmos especializados, que são mais simples e ainda assim nos garantem a solução ótima;
- ▶ Por exemplo, para o problema da mochila, podemos resolver a relaxação linear de cada nó por **inspeção**, isto é, usando um *algoritmo específico* que é mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim encontra a **solução ótima** da relaxação linear do nó;

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução por inspeção

- ▶ Até o momento, vimos que a relaxação linear de qualquer modelo de programação inteira pode ser resolvida pelo método gráfico e pelo método simplex (por ser um modelo de programação linear);
- ▶ **Em alguns casos específicos**, também é possível resolvê-la por algoritmos especializados, que são mais simples e ainda assim nos garantem a solução ótima;
- ▶ Por exemplo, para o **problema da mochila**, podemos resolver a relaxação linear de cada nó por **inspeção**, isto é, usando um *algoritmo específico* que é mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim encontra a **solução ótima** da relaxação linear do nó;
- ▶ O exercício resolvido a seguir explica essa ideia.

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 9

Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribuiu uma utilidade (quanto maior, mais útil), mostrada na tabela abaixo juntamente com o peso de cada objeto. Cada objeto é único, podendo ser levado ou não. O peso máximo que o alpinista pode carregar na mochila é 5 kg.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Barra de cereal	6	200
Água	9	1000
Jaqueta	7	400
Tênis	3	400
Protetor solar	5	200
Garrafas de oxigênio	10	3000
Bússola	2	100
Máquina fotográfica	6	500

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 9

- (a) Elabore um modelo de programação inteira que auxilie o alpinista a decidir quais itens carregar de modo a maximizar a utilidade total da mochila;
- (b) Resolva o modelo proposto usando um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima.
- (c) Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo proposto usando o método *branch-and-bound* com busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária. Resolva a relaxação linear de cada um dos nós por **inspeção**.

Método *branch-and-bound*

▷ Problema da mochila

$$\begin{array}{ll}\max & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\}\end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Problema da mochila

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} \quad & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- ▶ u_i : utilidade do item i , para $i = 1, \dots, n$;
- ▶ p_i : peso do item i , para $i = 1, \dots, n$;
- ▶ b : capacidade da mochila;

Método *branch-and-bound*

▷ Problema da mochila

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} \quad & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- ▶ u_i : utilidade do item i , para $i = 1, \dots, n$;
- ▶ p_i : peso do item i , para $i = 1, \dots, n$;
- ▶ b : capacidade da mochila;
- ▶ A solução ótima da *relaxação linear* de um problema da mochila pode ser obtida por inspeção.

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{array}{ll}\max & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1\end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{array}{ll}\max & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1\end{array}$$

Calculamos a utilidade relativa u_i/p_i de cada item i :

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\
 \text{s.a} & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1
 \end{array}$$

Calculamos a utilidade relativa u_i/p_i de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} \quad & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1 \end{aligned}$$

Calculamos a utilidade relativa u_i/p_i de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Selecionamos os itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\ \text{s.a} \quad & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1 \end{aligned}$$

Calculamos a utilidade relativa u_i/p_i de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Selecionamos os itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$\Rightarrow \frac{u_1}{p_1} \geq \frac{u_5}{p_5} \geq \frac{u_7}{p_7} \geq \frac{u_3}{p_3} \geq \frac{u_8}{p_8} \geq \frac{u_2}{p_2} \geq \frac{u_4}{p_4} \geq \frac{u_6}{p_6}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

$$\frac{u_{[1]}}{p_{[1]}} \geq \frac{u_{[2]}}{p_{[2]}} \geq \dots \geq \frac{u_{[n]}}{p_{[n]}}.$$

sendo que $[i]$ indica o item que está na posição i ;

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

$$\frac{u_{[1]}}{p_{[1]}} \geq \frac{u_{[2]}}{p_{[2]}} \geq \dots \geq \frac{u_{[n]}}{p_{[n]}}.$$

sendo que $[i]$ indica o item que está na posição i ;

2. Na ordem definida, escolher os itens integralmente (fazendo $x_i = 1$) até atingir a capacidade da mochila (sem violá-la);

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

$$\frac{u_{[1]}}{p_{[1]}} \geq \frac{u_{[2]}}{p_{[2]}} \geq \dots \geq \frac{u_{[n]}}{p_{[n]}}.$$

sendo que $[i]$ indica o item que está na posição i ;

2. Na ordem definida, escolher os itens integralmente (fazendo $x_i = 1$) até atingir a capacidade da mochila (sem violá-la);
3. Se todos os itens foram escolhidos, solução ótima **inteira** encontrada!

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

$$\frac{u_{[1]}}{p_{[1]}} \geq \frac{u_{[2]}}{p_{[2]}} \geq \dots \geq \frac{u_{[n]}}{p_{[n]}}.$$

sendo que $[i]$ indica o item que está na posição i ;

2. Na ordem definida, escolher os itens integralmente (fazendo $x_i = 1$) até atingir a capacidade da mochila (sem violá-la);
3. Se todos os itens foram escolhidos, solução ótima **inteira** encontrada!
4. Senão, a variável do primeiro item que não coube integralmente na mochila deve ser igual à folga na mochila dividida pelo peso deste item.

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

Solução da relaxação linear do problema da mochila por inspeção:

1. Ordenar os itens em ordem decrescente da utilidade relativa u_i/p_i :

$$\frac{u_{[1]}}{p_{[1]}} \geq \frac{u_{[2]}}{p_{[2]}} \geq \dots \geq \frac{u_{[n]}}{p_{[n]}}.$$

sendo que $[i]$ indica o item que está na posição i ;

2. Na ordem definida, escolher os itens integralmente (fazendo $x_i = 1$) até atingir a capacidade da mochila (sem violá-la);
3. Se todos os itens foram escolhidos, solução ótima **inteira** encontrada!
4. Senão, a variável do primeiro item que não coube integralmente na mochila deve ser igual à folga na mochila dividida pelo peso deste item. Ou seja, colocamos uma fração do item, de modo a completar a capacidade da mochila.

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8 \\
 \text{s.a} \quad & 0,2x_1 + 1x_2 + 0,4x_3 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 3x_6 + 0,1x_7 + 0,5x_8 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1, \dots, x_8 \leq 1
 \end{aligned}$$

Utilidade relativa u_i/p_i de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Selecionamos os itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);
- ▶ Se colocarmos o próximo item da lista (6), o peso acumulado se tornará 5,8kg, excedendo a capacidade da mochila (5kg);

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);
- ▶ Se colocarmos o próximo item da lista (6), o peso acumulado se tornará 5,8kg, excedendo a capacidade da mochila (5kg);
- ▶ Assim, podemos colocar apenas uma fração desse item para completar a capacidade da mochila:

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);
- ▶ Se colocarmos o próximo item da lista (6), o peso acumulado se tornará 5,8kg, excedendo a capacidade da mochila (5kg);
- ▶ Assim, podemos colocar apenas uma fração desse item para completar a capacidade da mochila: $x_6 = 2,2/3 = 0,733$

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);
- ▶ Se colocarmos o próximo item da lista (6), o peso acumulado se tornará 5,8kg, excedendo a capacidade da mochila (5kg);
- ▶ Assim, podemos colocar apenas uma fração desse item para completar a capacidade da mochila: $x_6 = 2,2/3 = 0,733$ (numerador é a folga da mochila; denominador é o peso do item).

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear por inspeção

- ▶ Fazendo $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 1$, $x_3 = 1$, $x_8 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ temos um peso acumulado de 2,8kg (folga = 2,2kg);
- ▶ Se colocarmos o próximo item da lista (6), o peso acumulado se tornará 5,8kg, excedendo a capacidade da mochila (5kg);
- ▶ Assim, podemos colocar apenas uma fração desse item para completar a capacidade da mochila: $x_6 = 2,2/3 = 0,733$ (numerador é a folga da mochila; denominador é o peso do item).
- ▶ Portanto, a solução ótima da **relaxação linear** do modelo é:
 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0,733$, $x_7 = 1$, $x_8 = 1$,
com valor ótimo $f(x) = 45,33$.

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.
- ▶ Como podemos obter um **limitante inferior (LI)** usando a mesma ideia de solução inspeção?

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.
- ▶ Como podemos obter um **limitante inferior (LI)** usando a mesma ideia de solução inspeção?
 - ▶ Aplicamos a solução por inspeção, mas sem fracionar nenhum item!

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.
- ▶ Como podemos obter um **limitante inferior (LI)** usando a mesma ideia de solução inspeção?
 - ▶ Aplicamos a solução por inspeção, mas sem fracionar nenhum item!
 - ▶ Seguimos os mesmos passos para escolhermos os itens integralmente, na ordem definida. Os que não couberem, não são escolhidos:

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.
- ▶ Como podemos obter um **limitante inferior (LI)** usando a mesma ideia de solução inspeção?
 - ▶ Aplicamos a solução por inspeção, mas sem fracionar nenhum item!
 - ▶ Seguimos os mesmos passos para escolhermos os itens integralmente, na ordem definida. Os que não couberem, não são escolhidos:
 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 1,$
com $f(x) = 38$ (LI);

Método *branch-and-bound*

▷ Limitante superior e inferior por inspeção

- ▶ O valor ótimo $f(x) = 45,33$ é um **limitante superior (LS)** para o valor ótimo modelo original (com restrições de integralidade), Por corresponder à solução ótima da relaxação linear.
- ▶ Como podemos obter um **limitante inferior (LI)** usando a mesma ideia de solução inspeção?
 - ▶ Aplicamos a solução por inspeção, mas sem fracionar nenhum item!
 - ▶ Seguimos os mesmos passos para escolhermos os itens integralmente, na ordem definida. Os que não couberem, não são escolhidos:
 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 0, x_7 = 1, x_8 = 1,$
com $f(x) = 38$ (LI);
- ▶ Essa resolução por inspeção permite resolvermos facilmente as relaxações lineares de cada nó do método *branch-and-bound*.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{0\}$

Nó 0 (raiz)

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 0 (S^0)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 0 (S^0)

Solução ótima da relaxação linear:

► $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 0 (S^0)

Solução ótima da relaxação linear:

► $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8 \text{ kg};$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 0 (S^0)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8 \text{ kg};$
- ▶ $x_6 = (5 - 2,8)/3 = 0,733;$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 0 (S^0)

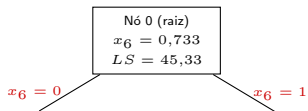
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8 \text{ kg};$
- ▶ $x_6 = (5 - 2,8)/3 = 0,733;$
- ▶ $f(x) = 45,33.$

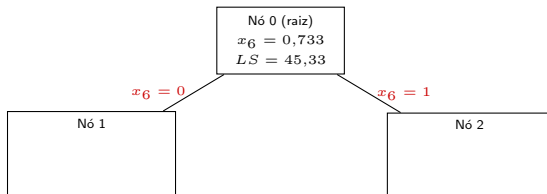
▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{0\}$

Nó 0 (raiz)
$x_6 = 0,733$
$LS = 45,33$

▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{0\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8 = 1 \Rightarrow 1,4 \text{ kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8 = 1 \Rightarrow 1,4 \text{ kg}$;
- ▶ $x_2 = (2 - 1,4)/1 = 0,6$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8 = 1 \Rightarrow 1,4 \text{ kg}$;
- ▶ $x_2 = (2 - 1,4)/1 = 0,6$;
- ▶ $x_4 = 0$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

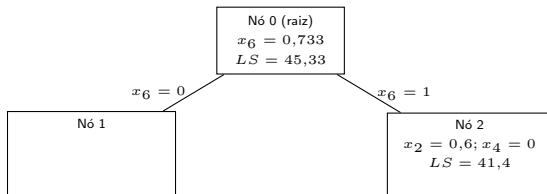
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_6 = 1\}$)

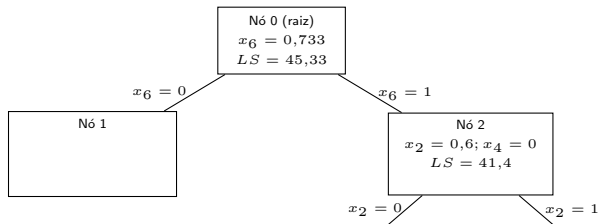
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8 = 1 \Rightarrow 1,4 \text{ kg}$;
- ▶ $x_2 = (2 - 1,4)/1 = 0,6$;
- ▶ $x_4 = 0$;
- ▶ $f(x) = 41,4$.

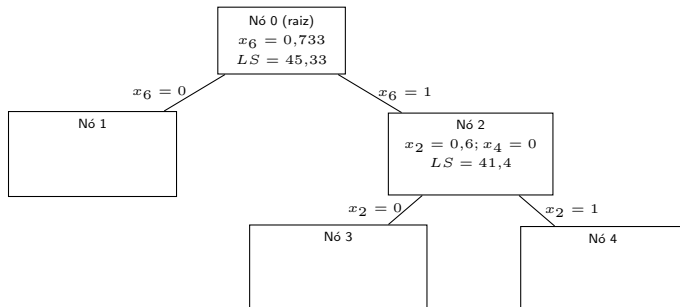
▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{ kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{ kg}$;
- ▶ $x_8 = (1 - 0,9)/0,5 = 0,2$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{ kg}$;
- ▶ $x_8 = (1 - 0,9)/0,5 = 0,2$;
- ▶ $x_4 = 0$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

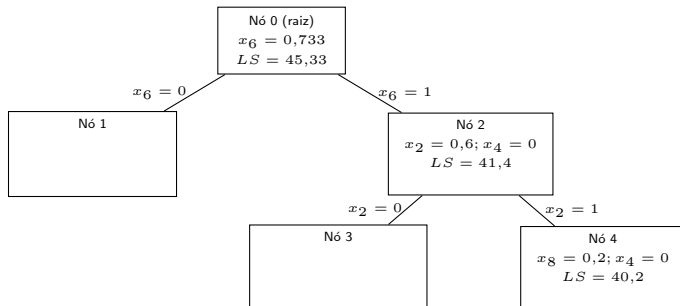
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 4 ($S^4 = S^2 \cap \{x_2 = 1\}$)

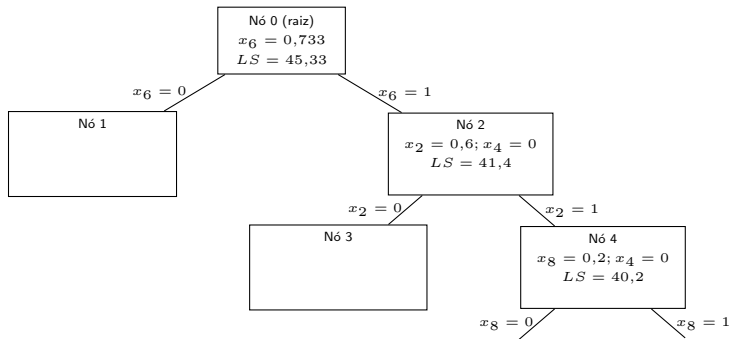
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 1 \Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{ kg}$;
- ▶ $x_8 = (1 - 0,9)/0,5 = 0,2$;
- ▶ $x_4 = 0$;
- ▶ $f(x) = 40,2$.

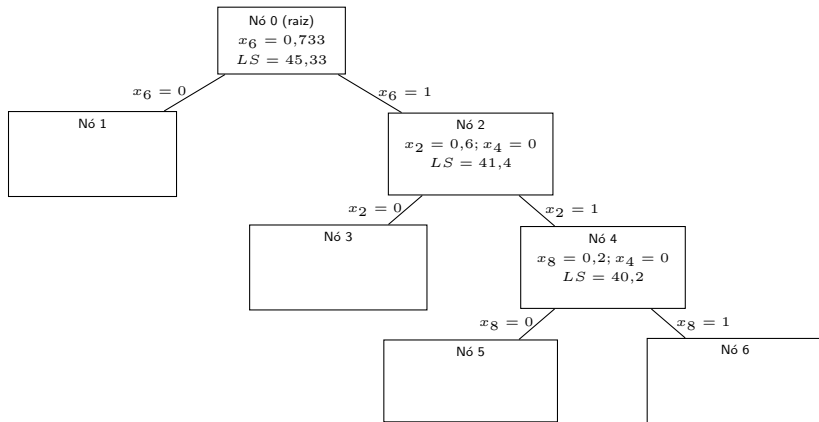
▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, 6\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ Nenhuma folga restante!

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ Nenhuma folga restante! $\Rightarrow x_3, x_4 = 0$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ Nenhuma folga restante! $\Rightarrow x_3, x_4 = 0$;
- ▶ Solução inteira :)

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

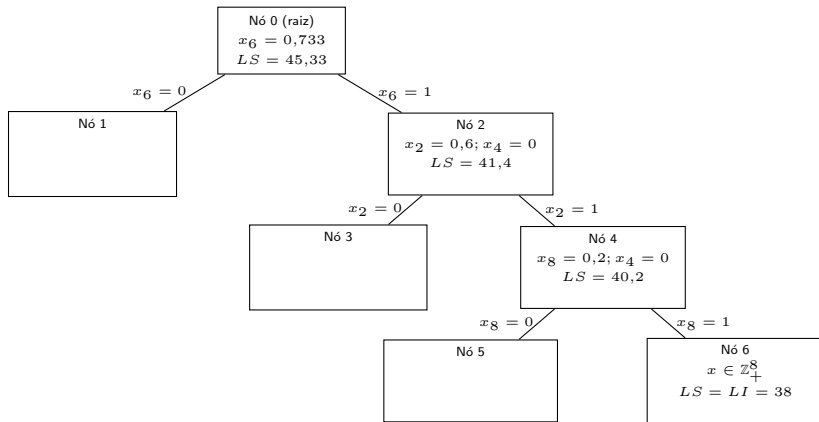
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 6 ($S^6 = S^4 \cap \{x_8 = 1\}$)

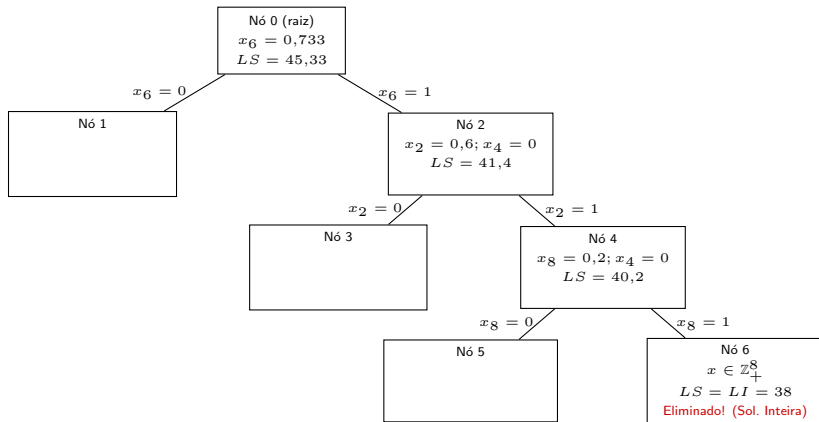
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,5 = 0,5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ Nenhuma folga restante! $\Rightarrow x_3, x_4 = 0$;
- ▶ Solução inteira :)
- ▶ $f(x) = 38$.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, 6\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;
- ▶ $x_4 = (1 - 0,9)/0,4 = 0,25$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

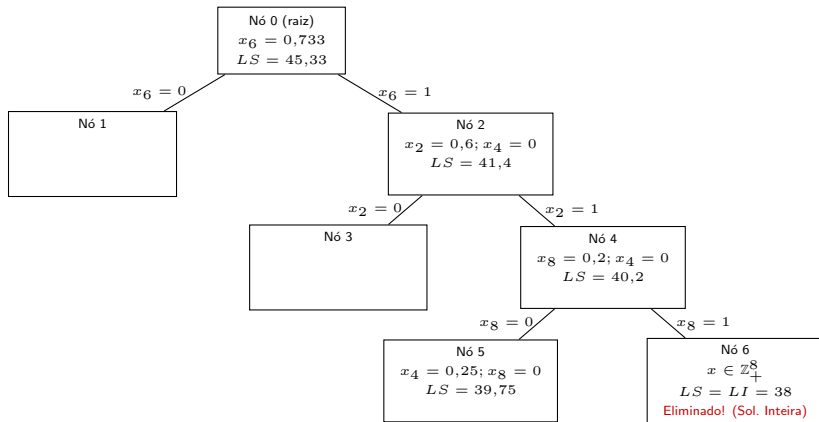
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 5 ($S^5 = S^4 \cap \{x_8 = 0\}$)

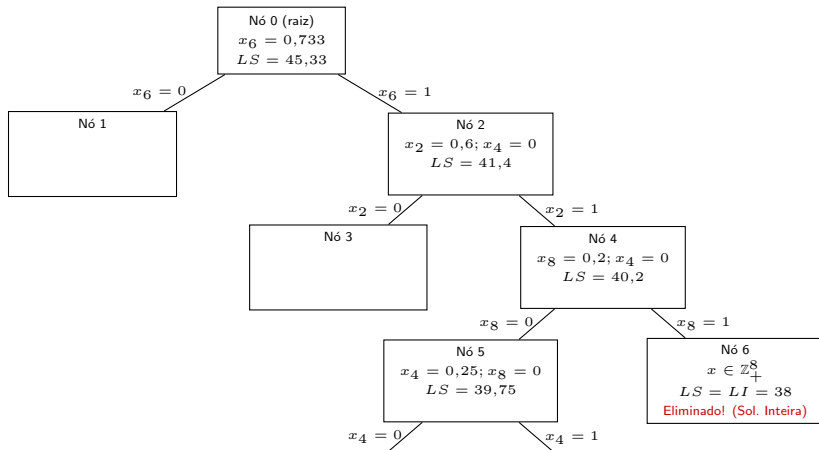
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_8 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;
- ▶ $x_4 = (1 - 0,9)/0,4 = 0,25$;
- ▶ $f(x) = 39,75$.

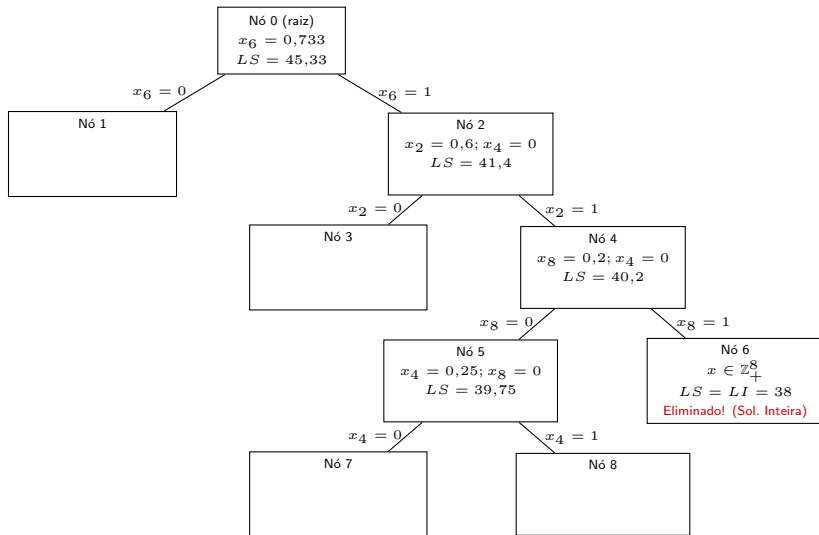
$\triangleright x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$



$\triangleright x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :								
i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,4 = 0,6\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,4 = 0,6\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,4 = 0,6\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,4 = 0,6\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ $x_3 = (0,6 - 0,5)/0,4 = 0,25$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

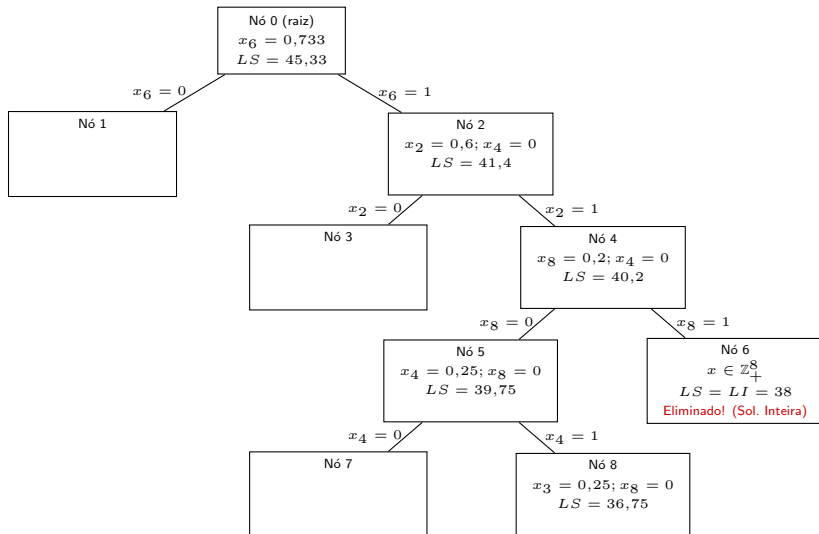
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 8 ($S^8 = S^5 \cap \{x_4 = 1\}$)

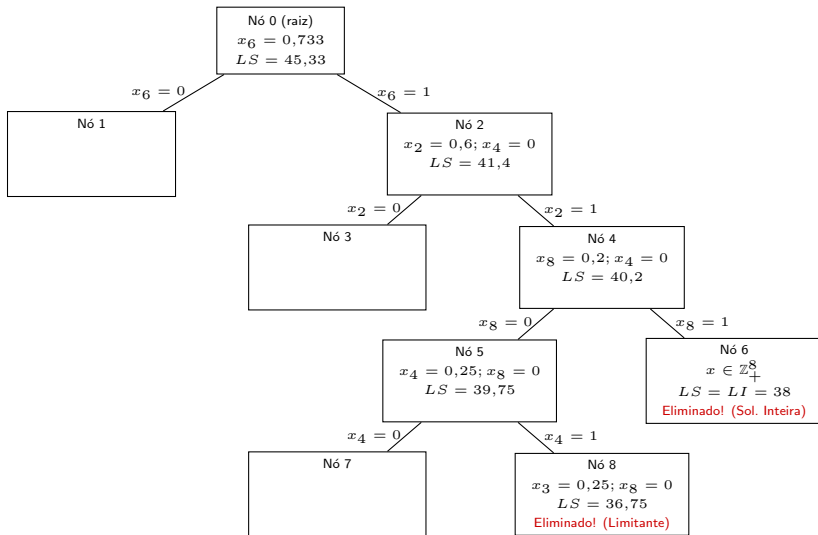
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 - 0,4 = 0,6\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7 = 1 \Rightarrow 0,5\text{kg}$;
- ▶ $x_3 = (0,6 - 0,5)/0,4 = 0,25$;
- ▶ $f(x) = 36,75$.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira :)

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

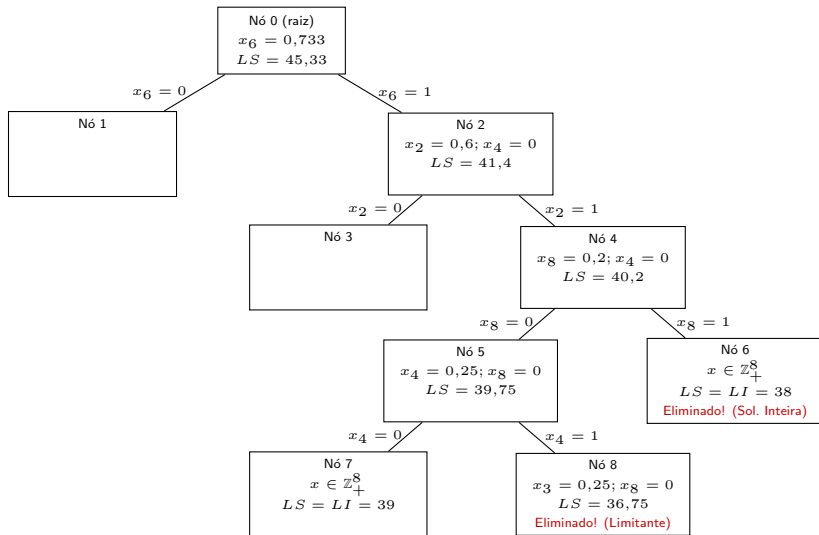
$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 7 ($S^7 = S^5 \cap \{x_4 = 0\}$)

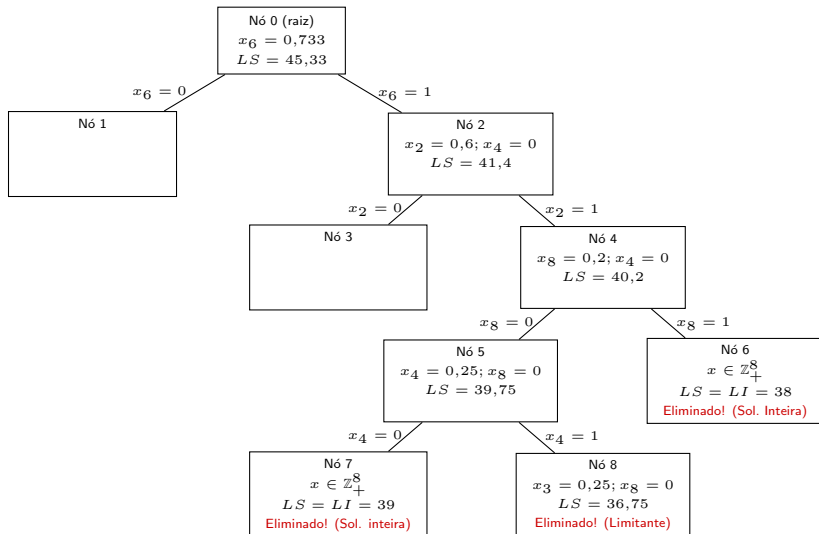
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$, $x_2 = 1$, $x_8 = 0$ e $x_4 = 0$
 $\Rightarrow 5 - 3 - 1 = 1\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3 = 1 \Rightarrow 0,9\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira :)
- ▶ $f(x) = 39$.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$; $LI = 38$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$; $LI = 39$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_4 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_4 = 1 \Rightarrow 1,8\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_4 = 1 \Rightarrow 1,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_4 = 1 \Rightarrow 1,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira :)

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :								
i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

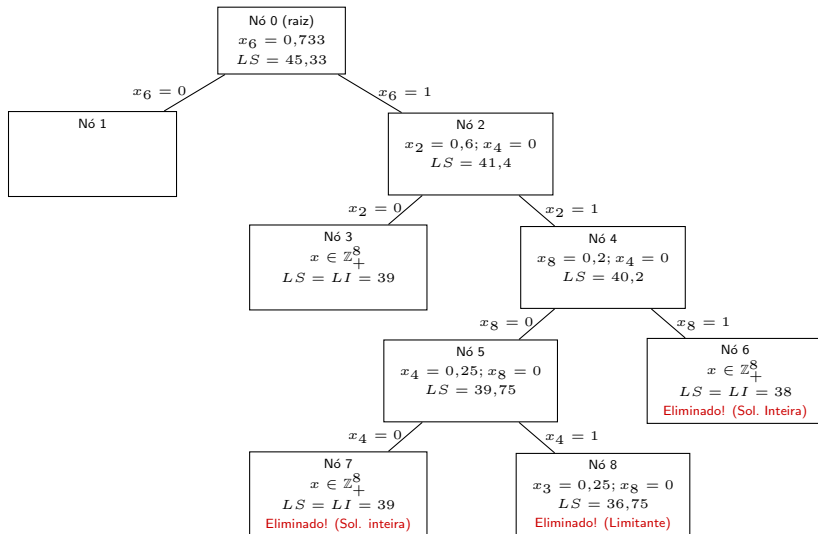
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 3 ($S^3 = S^2 \cap \{x_2 = 0\}$)

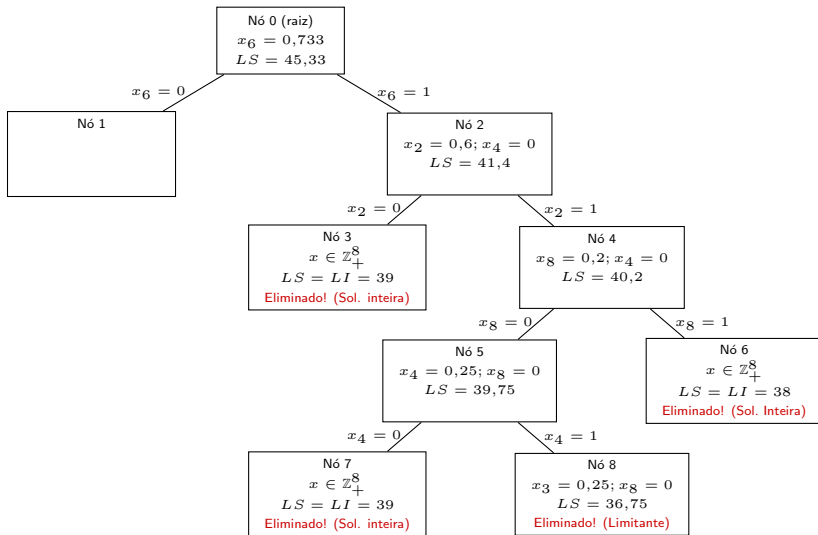
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 1$ e $x_2 = 0 \Rightarrow 5 - 3 = 2\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_4 = 1 \Rightarrow 1,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira :)
- ▶ $f(x) = 39$.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$; $LI = 39$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$; $LI = 39$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{8}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :								
i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8\text{kg}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira!

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

Utilidade, peso e utilidade relativa de cada item i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	6	9	7	3	5	10	2	6
p_i	0,2	1	0,4	0,4	0,2	3	0,1	0,5
$\frac{u_i}{p_i}$	30	9	17,5	7,5	25	3,33	20	12

Itens em ordem decrescente da utilidade relativa:

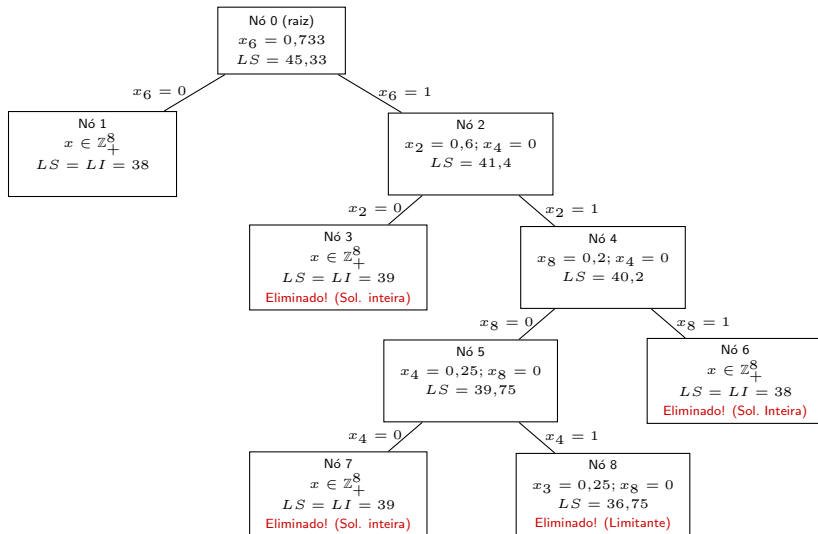
$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$$

Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_6 = 0\}$)

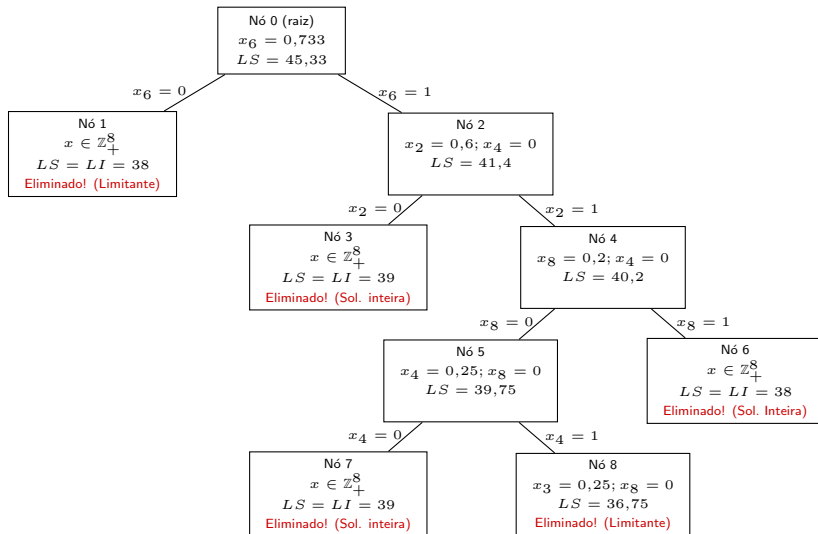
Solução ótima da relaxação linear:

- ▶ iniciamos com $x_6 = 0 \Rightarrow 5\text{kg}$ restantes;
- ▶ $x_1, x_5, x_7, x_3, x_8, x_2, x_4 = 1 \Rightarrow 2,8\text{kg}$;
- ▶ Todos os itens possíveis foram escolhidos.
- ▶ Solução inteira!
- ▶ $f(x) = 38$.

▷ $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$; $LI = 39$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{8}\}$



▷ $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$; $LI = 39$; Nós: $\{\emptyset, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício resolvido

- ▶ Fim do método *branch-and-bound*: todos os nós foram explorados!
- ▶ Solução ótima encontrada $x^* = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$, com valor ótimo 39;
- ▶ Assim, a utilidade máxima da mochila é 39, levando-se todos os itens, exceto o 4 e o 8.
- ▶ Observe que essa é uma das soluções ótimas: uma outra foi encontrada durante o método e também poderia ter sido escolhida como ótima.

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 10

Uma companhia de extração de petróleo tem disponível 6 bombas de submersão e deseja usá-las para aumentar a quantidade extraída de petróleo. A energia para alimentação das bombas é fornecida por um único gerador, cuja potência máxima é 2 kVA. A potência consumida e a eficiência de extração de cada bomba são apresentadas na tabela a seguir. Deseja-se determinar quais bombas devem ser usadas, de modo a maximizar a eficiência total da extração.

Bomba	1	2	3	4	5	6
Consumo (kVA)	0,2	1,0	0,4	0,4	0,2	0,9
Eficiência	5	9	7	3	5	10

- Elabore um modelo de programação inteira para o problema.
- Resolva o modelo do item anterior pelo método *branch-and-bound* com busca em **largura** e ramificação na variável mais fracionária, resolvendo as relaxações lineares por **inspeção**. Apresente os cálculos e justifique os passos detalhadamente.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?