



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 7.4: Método *Branch-and-Bound*: resolução das relaxações lineares
pelo método simplex

Apresentação - Tópico 7.4

Objetivos deste tópico:

- ▶ Continuar o estudo do método *branch-and-bound*: Ver como usar o método simplex para resolver as relaxações lineares após ramificações, utilizando a base ótima do nó anterior.

Vídeo-aulas:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=pzVW6yzzAd4>
- ▶ https://www.youtube.com/watch?v=mD1_ieY3LgM

Método *branch-and-bound*

- ▷ Resolução da relaxação linear pelo método simplex

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear pelo método simplex

- ▶ O método *branch-and-bound* comumente usa o método simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó;

Método *branch-and-bound*

▷ Resolução da relaxação linear pelo método simplex

- ▶ O método *branch-and-bound* comumente usa o método simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó;
- ▶ Para fazer isso de forma mais eficiente, podemos reutilizar a base ótima de cada nó para inicializar o método simplex em um nó filho!

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound*, com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária, usando: (a) o método **primal** simplex para resolver as relaxações lineares em cada nó; (b) o método **dual** simplex para resolver as relaxações lineares em cada nó.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{0\}$

Nó 0 (raiz)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 0 (S^0):

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 0 (S^0):

$$\begin{array}{ll} -\min & -2x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 0 (S^0):

$$\begin{array}{ll} -\min & -2x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

► Após resolver pelo método simplex, obtemos na última iteração:

$$\mathcal{B} = \{2, 1\}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}; \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \end{bmatrix};$$

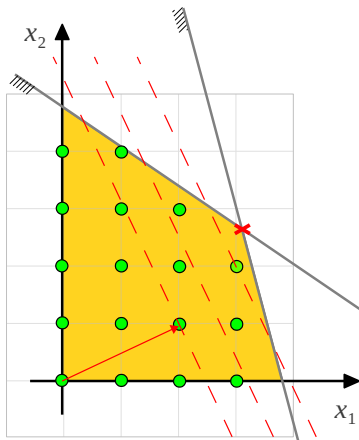
$$p^T = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}; \quad s_3 = 0,2; \quad s_4 = 0,4.$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

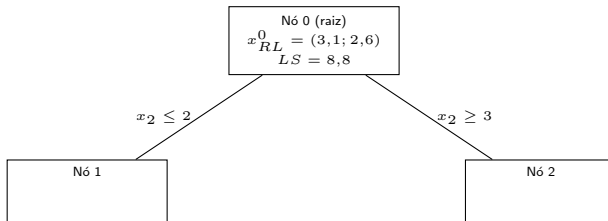
$$x_{RL} = (3,1; 2,6), f(x_{RL}) = 8,8$$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset\}$

$\begin{array}{l} \text{Nó 0 (raiz)} \\ x_{RL}^0 = (3, 1; 2, 6) \\ \quad \quad \quad LS = 8, 8 \end{array}$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & 0x_1 + 1x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Poderíamos resolver este problema iniciando com a base trivial $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Poderíamos resolver este problema iniciando com a base trivial $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$;
- ▶ Entretanto assim estaríamos jogando fora uma informação muito importante:

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Poderíamos resolver este problema iniciando com a base trivial $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$;
- ▶ Entretanto assim estaríamos jogando fora uma informação muito importante:
a base ótima do nó pai!

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{array}{ll}\text{--min} & -2x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\ & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

- ▶ Poderíamos resolver este problema iniciando com a base trivial $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$;
- ▶ Entretanto assim estaríamos jogando fora uma informação muito importante:
a base ótima do nó pai!
- ▶ O ideal é reaproveitarmos a base $\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e *reotimizarmos* o problema.

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{array}{ll} -\min & -2x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\ & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

- ▶ Poderíamos resolver este problema iniciando com a base trivial $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$;
- ▶ Entretanto assim estaríamos jogando fora uma informação muito importante:
a base ótima do nó pai!
- ▶ O ideal é reaproveitarmos a base $\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e *reotimizarmos* o problema.
- ▶ Como?

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- ▶ Podemos incluir a variável de folga da nova restrição? ($\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- Podemos incluir a variável de folga da nova restrição? ($\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$)

- Até podemos... mas com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- Podemos incluir a variável de folga da nova restrição? ($\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$)

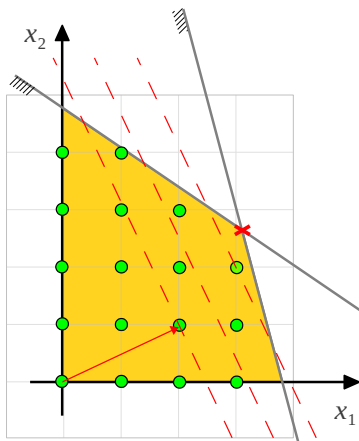
- Até podemos... mas com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Infactível!)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$x_{RL} = (3,1; 2,6), f(x_{RL}) = 8,8$$



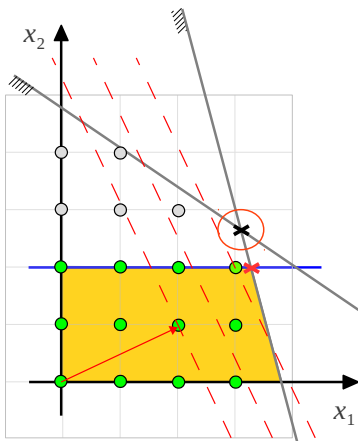
Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\
 & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\
 & 0x_1 + 1x_2 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Solução ótima do problema anterior se torna infactível após inserirmos $x_2 \leq 2$.

Violação de 0,6, dado que x_2 era 2,6;
Assim, $1x_2 + 1x_5 = 2$ se, e somente se,
 $x_5 = -0,6$!



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- Podemos incluir a variável de folga da nova restrição? ($\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$)

- Até podemos... mas com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Infactível!)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- Podemos incluir a variável de folga da nova restrição? ($\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$)

- Até podemos... mas com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Infactível!)

- Vamos então recorrer ao *M-grande* :)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - \textcolor{red}{1}x_6 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - \textcolor{red}{1}x_6 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - \textcolor{red}{1}x_6 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;
- ▶ Iniciamos o método simplex com a base ($\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - \textcolor{red}{1}x_6 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;
- Iniciamos o método simplex com a base ($\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$)

► Assim: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ \textcolor{green}{0,6} \end{bmatrix}$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + 100x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - 1x_6 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

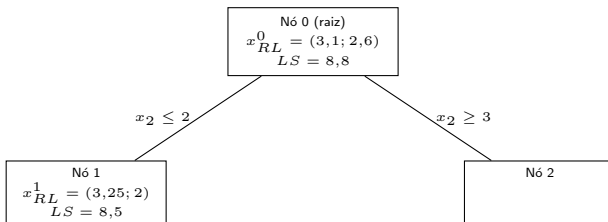
$$\begin{aligned} & -\min && -2x_1 - 1x_2 + 100x_6 \\ & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\ & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\ & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 - 1x_6 = 2 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

- 2a iteração do método simplex (iniciando com $\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$):

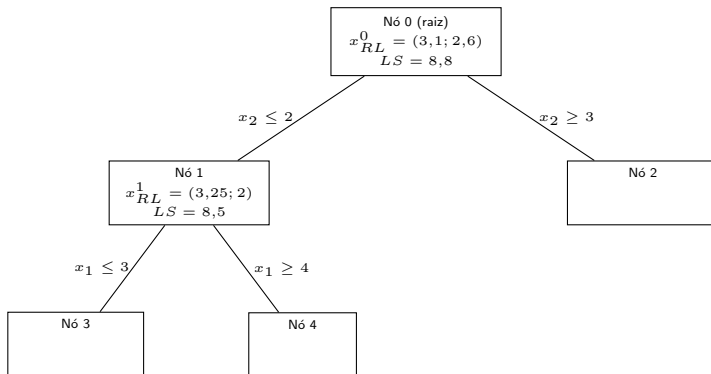
$$\mathcal{B} = \{2, 1, 3\}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,25 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -2,5 \end{bmatrix}; \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3,25 \\ 1,5 \end{bmatrix};$$

$$p^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad s_4 = 0,5; \quad s_5 = 0,5; \quad s_6 = 99,5.$$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, \not\downarrow, 2\}$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2, 3, 4\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{aligned} & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\ & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\ & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 3 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{aligned} & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\ & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\ & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\ & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + \textcolor{red}{1}x_6 = 3 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + \textcolor{red}{1}x_6 = 3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{array}{ll} -\min & -2x_1 - 1x_2 + Mx_6 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\ & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 1x_6 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

- Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;
- Iniciamos o método simplex com a base ($\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \textcolor{red}{0}x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + \textcolor{red}{1}x_6 = 3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Inserimos uma coluna, igual à da última variável de folga, mas com sinal trocado;
- Iniciamos o método simplex com a base ($\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$)

► Assim: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ \textcolor{green}{0,4} \end{bmatrix}$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + 100x_6 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 1x_6 = 3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 2 ($S^2 = S^0 \cap \{x_2 \geq 3\}$):

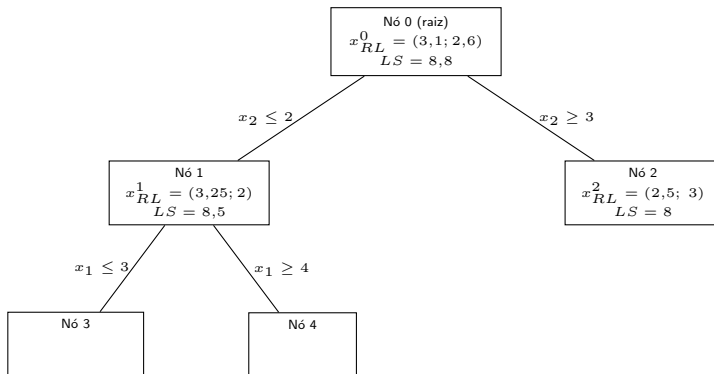
$$\begin{aligned} & -\min && -2x_1 - 1x_2 + 100x_6 \\ & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\ & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\ & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 1x_6 = 3 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

- 2a iteração do método simplex (iniciando com $\mathcal{B} = \{2, 1, 6\}$):

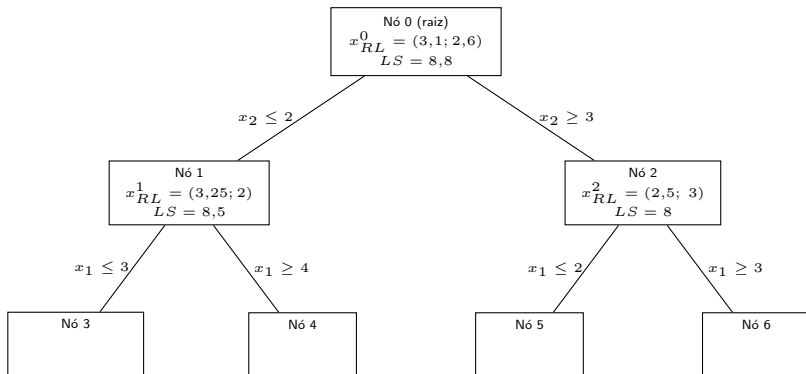
$$\mathcal{B} = \{2, 1, 4\}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & -1,5 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$p^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad s_3 = 1; \quad s_5 = 2; \quad s_6 = 98.$$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, 3, 4\}$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, 3, 4, 5, 6\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 3 ($S^3 = S^1 \cap \{x_1 \leq 3\}$):

$$\begin{array}{ll}
 -\min & -2x_1 - 1x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 14 \\
 & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 15 \\
 & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 2 \\
 & 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
 \end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 3 ($S^3 = S^1 \cap \{x_1 \leq 3\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + \textcolor{red}{M}x_7 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + \textcolor{red}{0}x_7 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + \textcolor{red}{0}x_7 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + \textcolor{red}{0}x_7 = 2 \\
 & && 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 - \textcolor{red}{1}x_7 = 3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 3 ($S^3 = S^1 \cap \{x_1 \leq 3\}$):

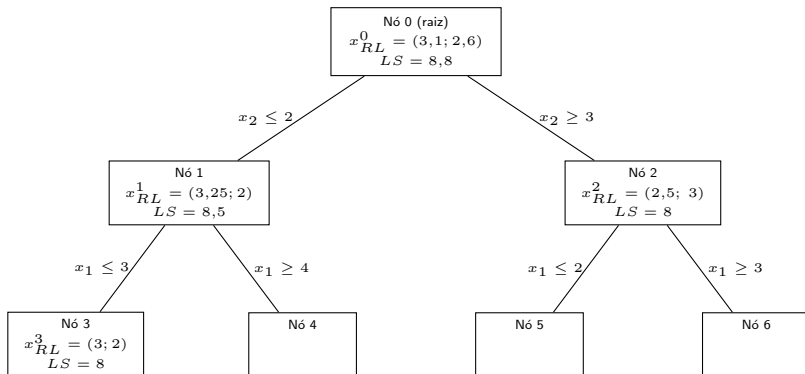
$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 + 100x_7 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 2 \\
 & && 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 - 1x_7 = 3 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

- 2a iteração do método simplex (iniciando com $\mathcal{B} = \{2, 1, 3, 7\}$):

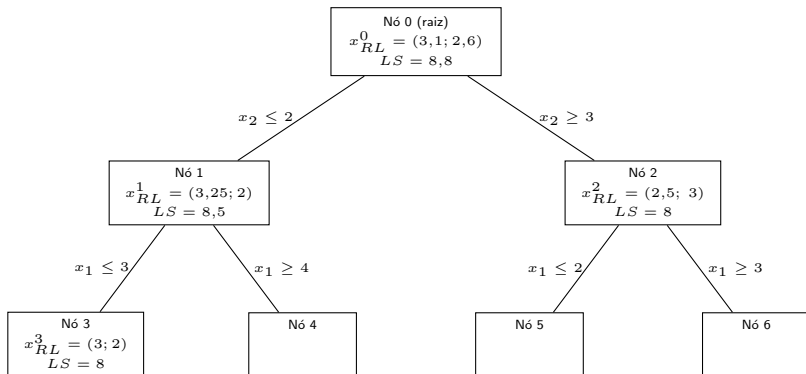
$$\mathcal{B} = \{2, 1, 3, 4\}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$p^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad s_5 = 1; \quad s_6 = 2; \quad s_7 = 98.$$

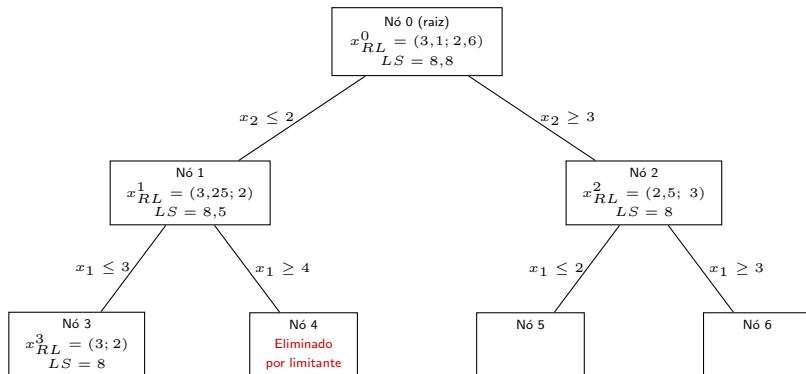
▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5, 6\}$



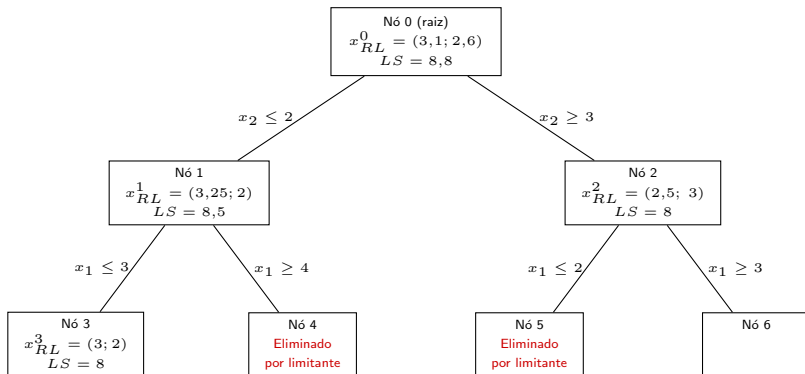
▷ $x^* = (3; 2)$; $LI = 8$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, 5, 6\}$



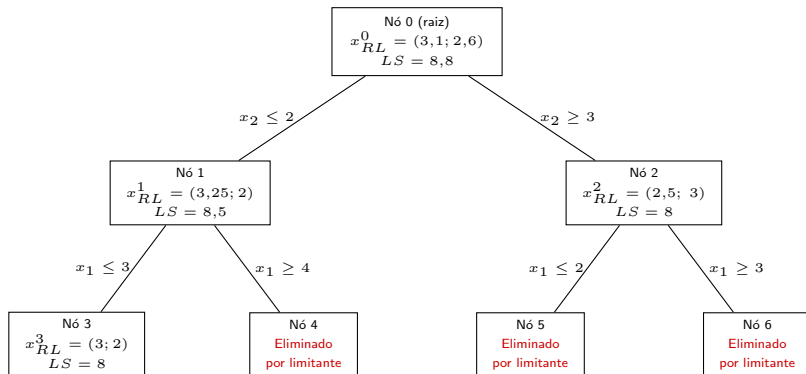
▷ $x^* = (3; 2)$; $LI = 8$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, 6\}$



▷ $x^* = (3; 2)$; $LI = 8$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, 6\}$



▷ $x^* = (3; 2)$; $LI = 8$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\}$ (FIM)



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound*, com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária, usando: (a) o método **primal** simplex para resolver as relaxações lineares em cada nó; (b) o método **dual simplex** para resolver as relaxações lineares em cada nó.

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 1x_2$$

$$\text{s.a} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 14$$

$$4x_1 + 1x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

► Nó 0 (S^0):

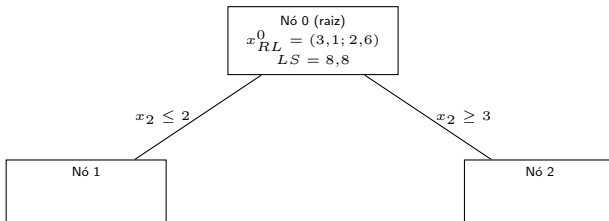
$$\begin{aligned} & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\ & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 14 \\ & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 15 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

► Após resolver pelo método simplex, obtemos na última iteração:

$$\mathcal{B} = \{2, 1\}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}; \quad x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \end{bmatrix};$$

$$p^T = \begin{bmatrix} -0,2 & -0,4 \end{bmatrix}; \quad s_3 = 0,2; \quad s_4 = 0,4.$$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- ▶ Incluímos a variável de folga da nova restrição: $\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{array}{ll} -\min & -2x_1 - 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\ & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- ▶ Incluímos a variável de folga da nova restrição: $\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$

- ▶ Com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Primal Infactível!)

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- ▶ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- ▶ Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- ▶ Incluímos a variável de folga da nova restrição: $\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$

- ▶ Com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Primal Infactível!)

- ▶ Mas... $s_3 = 0.2$ e $s_4 = 0.4$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 7

- Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$):

$$\begin{aligned}
 & -\min && -2x_1 - 1x_2 \\
 & \text{s.a} && 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\
 & && 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 15 \\
 & && 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 2 \\
 & && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

- Dado que o problema agora tem 3 restrições, precisamos de 3 índices na base;
- Incluímos a variável de folga da nova restrição: $\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$
- Com essa base: $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$ (Primal Infactível!)
- Mas... $s_3 = 0.2$ e $s_4 = 0.4$ (Dual Factível $\Rightarrow$ Podemos começar o dual simplex!)

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = [-0.4, 0.2, 1]$$

$$\eta^T a_3 = -0.4; \quad \eta^T a_4 = 0.2$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = [-0.4, 0.2, 1]$$

$$\eta^T a_3 = -0.4; \quad \eta^T a_4 = 0.2$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = [-0.4, 0.2, 1]$$

$$\eta^T a_3 = -0.4; \quad \eta^T a_4 = 0.2$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_3}{-\eta^T a_3}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = [-0.4, 0.2, 1]$$

$$\eta^T a_3 = -0.4; \quad \eta^T a_4 = 0.2$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_3}{-\eta^T a_3} = 0,5$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.4 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,1 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0.2$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0.4$$

► $x_{\mathcal{B}_3} = x_5$ sairá da base ($l = 3$);

► Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_3 B^{-1} = [-0.4, 0.2, 1]$$

$$\eta^T a_3 = -0.4; \quad \eta^T a_4 = 0.2$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_3}{-\eta^T a_3} = 0,5$$

► x_3 entrará na base ($k = 3$)

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.25 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Nó 1 ($S^1 = S^0 \cap \{x_2 \leq 2\}$)

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{2, 1, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 1 & -0.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

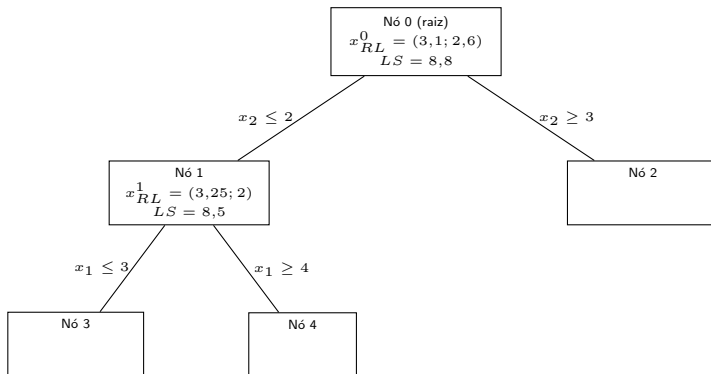
$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3,25 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

► PARE! Solução ótima encontrada!

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2, 3, 4\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 8

Considere o seguinte modelo de programação inteira:

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 8

- (a) Determine uma solução ótima e o valor ótimo da relaxação linear deste modelo usando o método primal simplex passo-a-passo;
- (b) Determine soluções inteiras para o modelo usando arredondamento. Comente sobre a factibilidade e otimalidade destas soluções;
- (c) Determine uma solução ótima e o valor ótimo deste modelo usando o método *branch-and-bound* com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária. Use o método **primal** simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó;
- (d) Determine uma solução ótima e o valor ótimo deste modelo usando o método *branch-and-bound* com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária. Use o método **dual** simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?