



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 7.3: Método *Branch-and-Bound*: exemplo, algoritmo e alguns conceitos importantes

Apresentação - Tópico 7.3

Objetivos deste tópico:

- ▶ Aplicar o método *Branch-and-Bound* para compreender seu funcionamento;
- ▶ Estudar seu algoritmo e mais alguns conceitos, regras e variantes importantes.

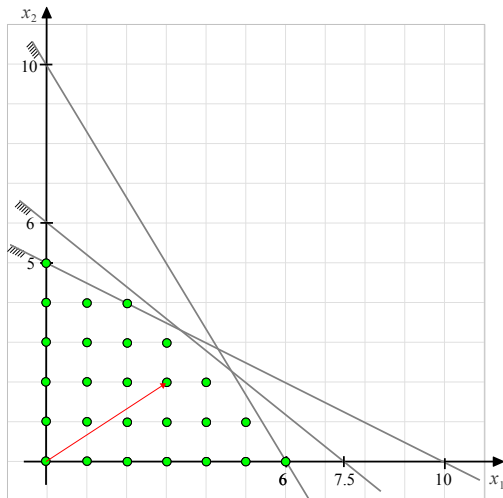
Vídeo-aula:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=BaBoBFuYOfU>

Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$



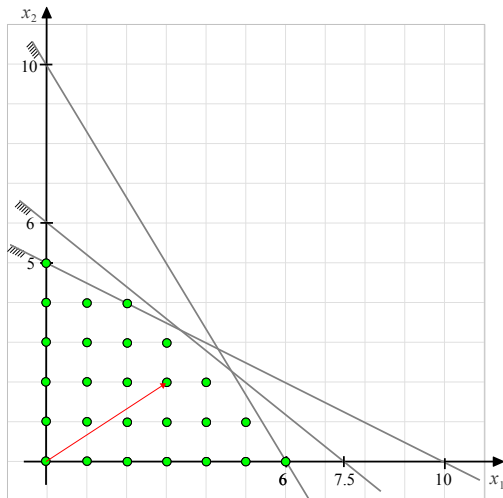
▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{0\}$

Nó 0 (raiz)

Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

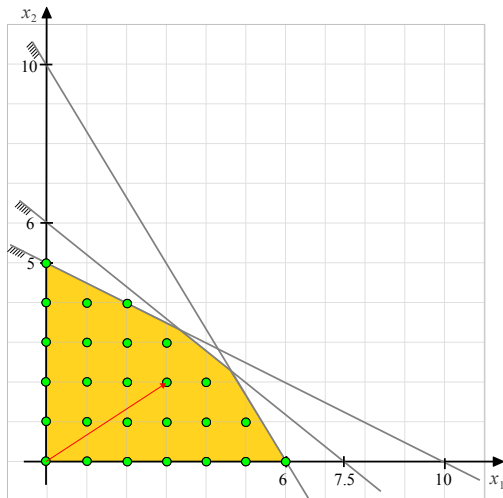
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

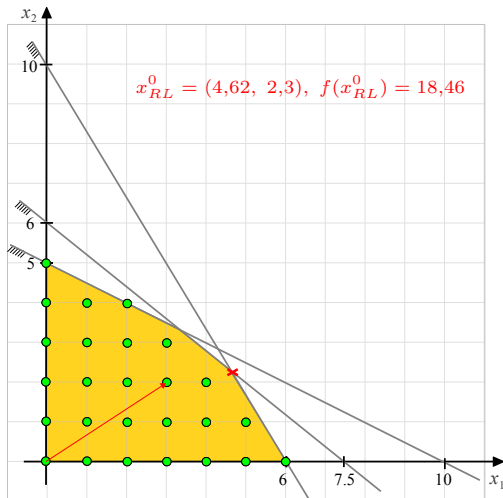
$$\begin{aligned}
 (S^0) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

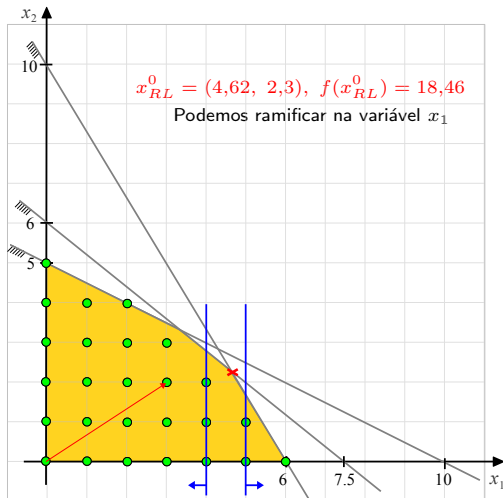
$$\begin{aligned}
 (S^0) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^0) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



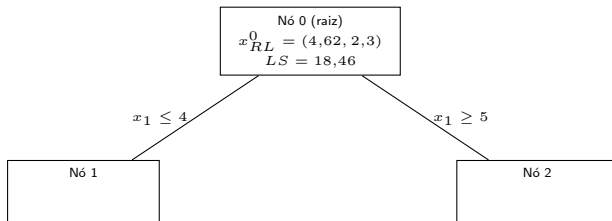
▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{0\}$

Nó 0 (raiz)

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset\}$

$\begin{array}{l} \text{Nó 0 (raiz)} \\ x_{RL}^0 = (4,62, 2,3) \\ LS = 18,46 \end{array}$

▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$

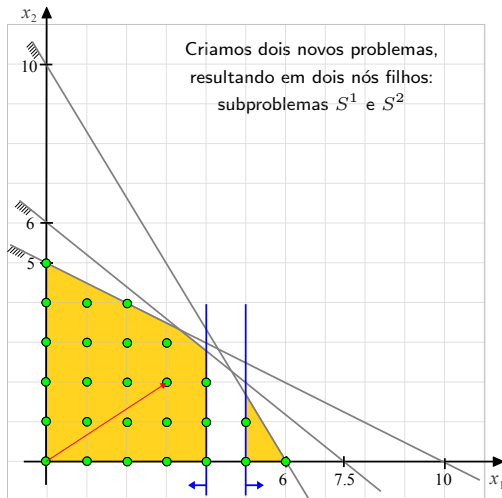


Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^1) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

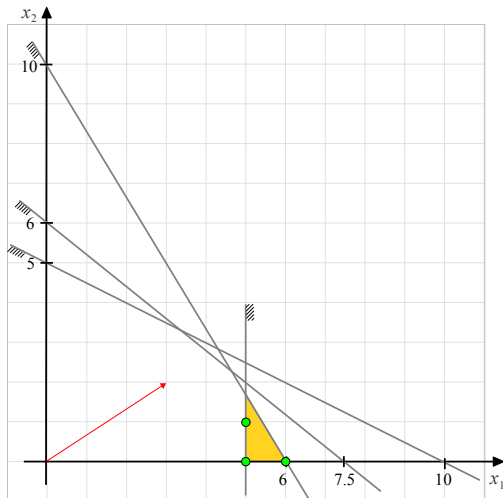
$$\begin{aligned}
 (S^2) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

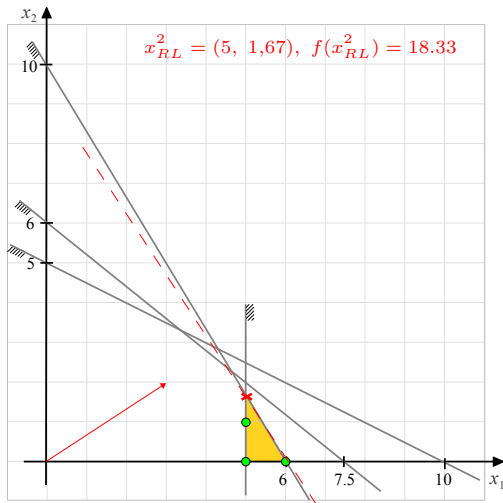
$$\begin{aligned}
 (S^2) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

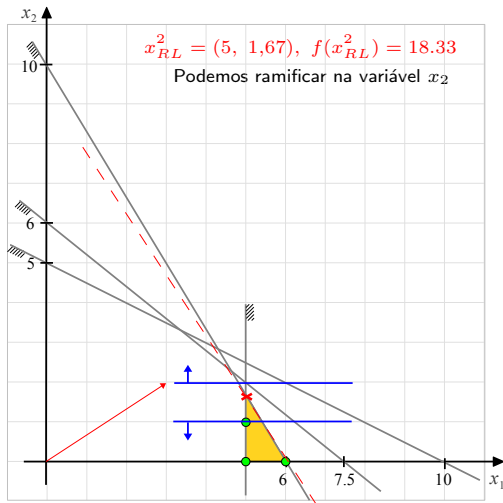
$$\begin{aligned}
 (S^2) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



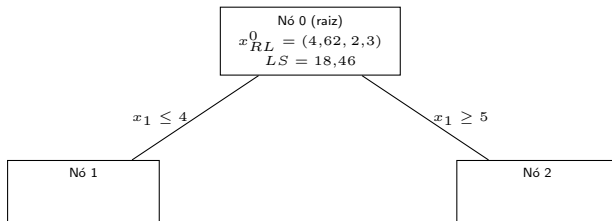
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

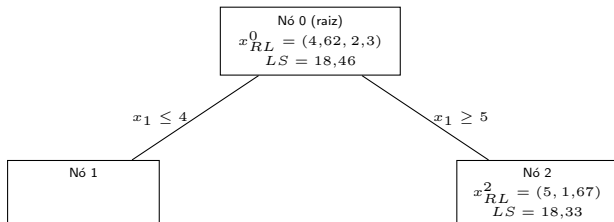
$$\begin{aligned}
 (S^2) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



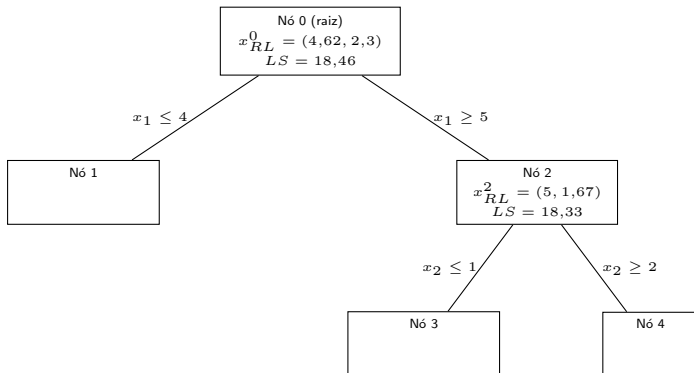
▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, 2\}$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$

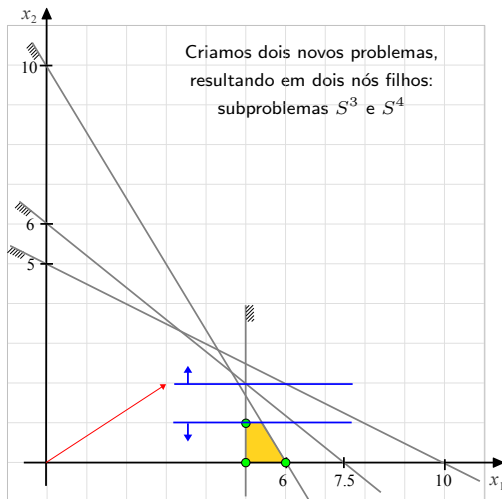


Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^3) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

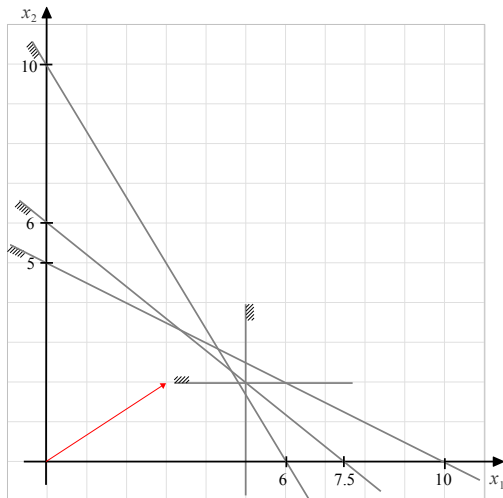
$$\begin{aligned}
 (S^4) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

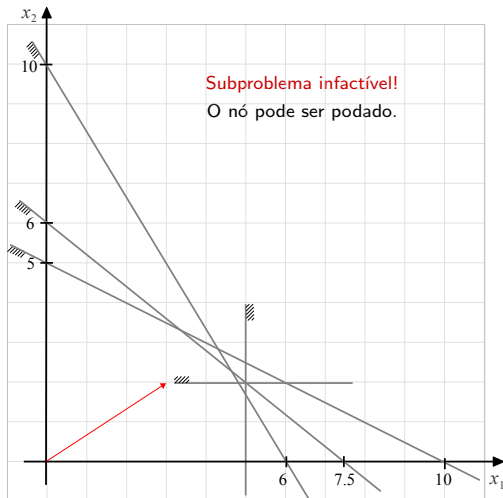
$$\begin{aligned}
 (S^4) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



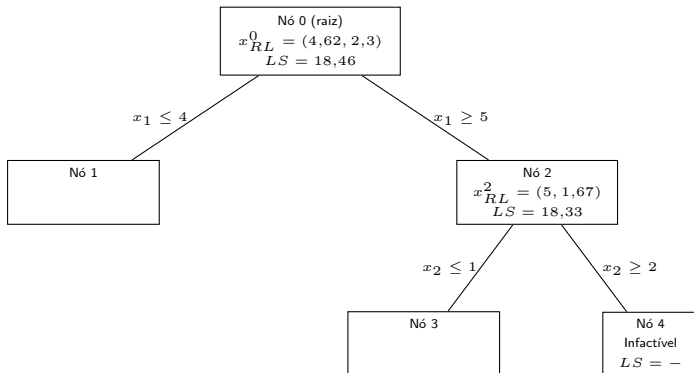
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^4) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



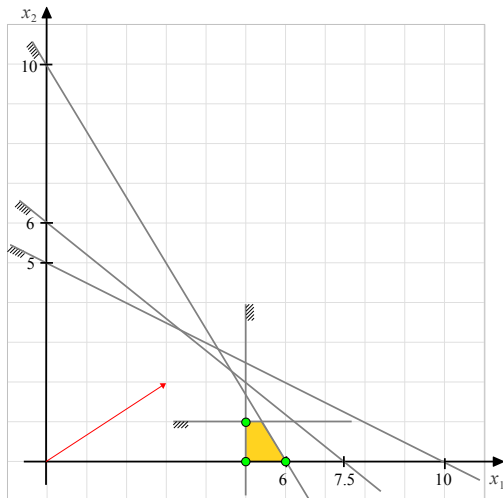
▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

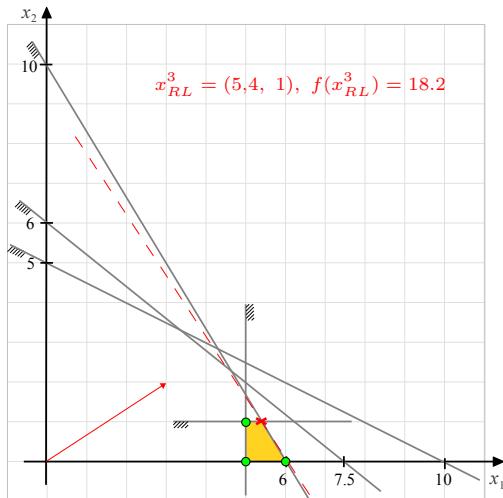
$$\begin{aligned}
 (S^3) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

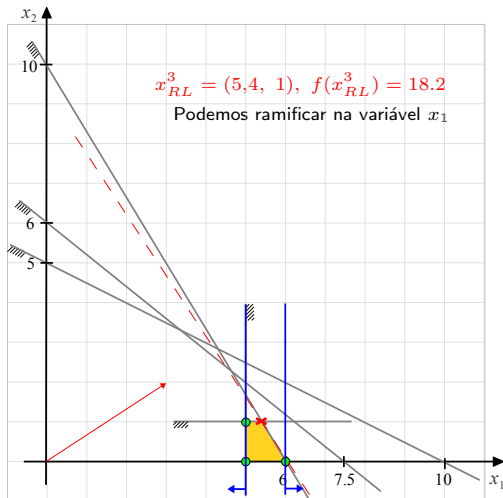
$$\begin{aligned}
 (S^3) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



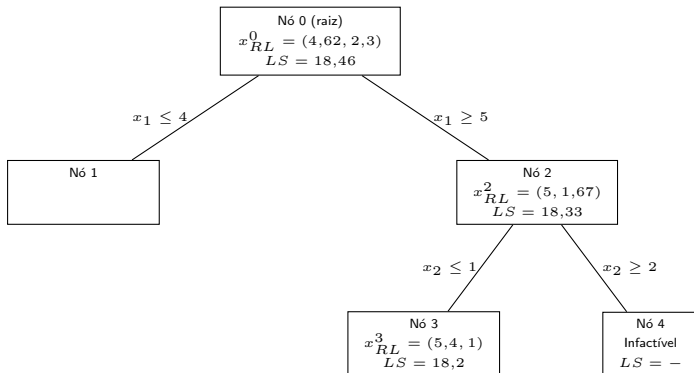
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

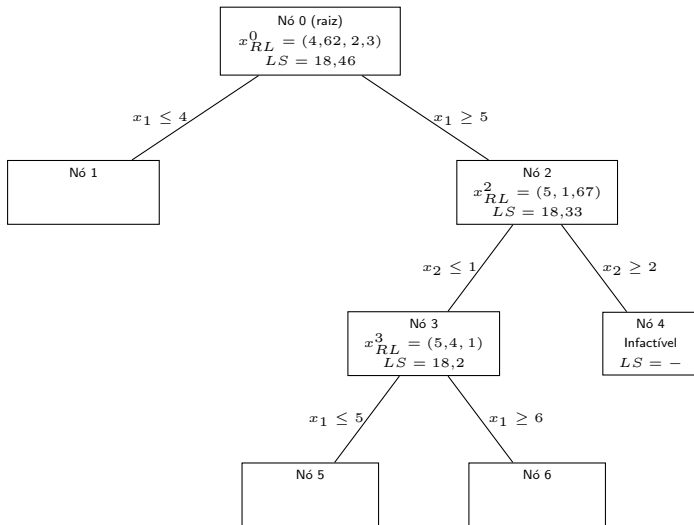
$$\begin{aligned}
 (S^3) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}\}$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, 6\}$

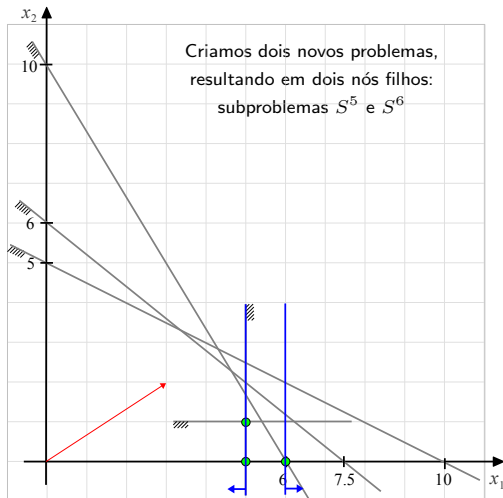


Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^5) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

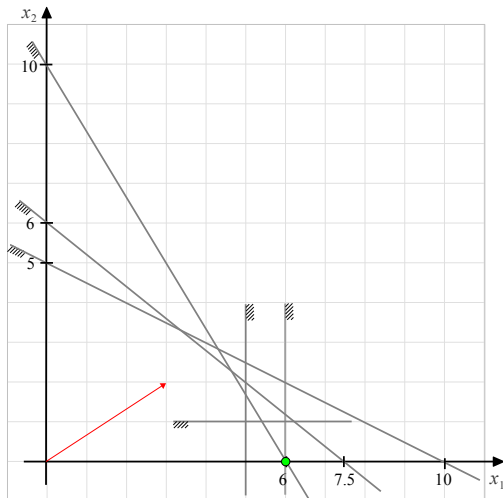
$$\begin{aligned}
 (S^6) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \geq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

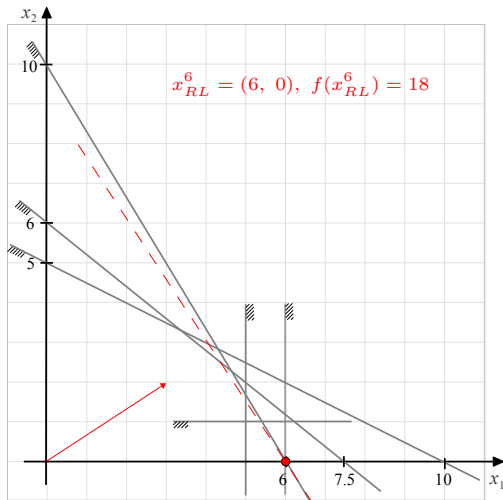
$$\begin{aligned}
 (S^6) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \geq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

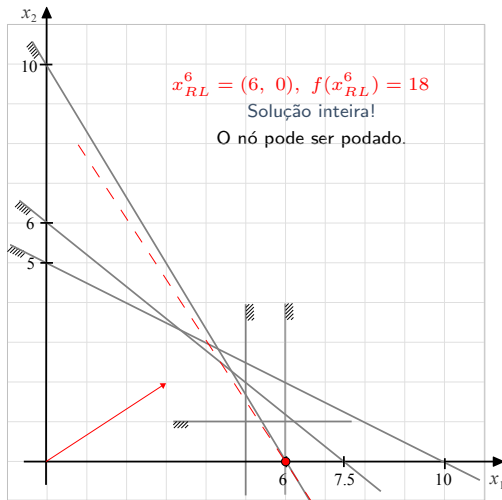
$$\begin{aligned} (S^6) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



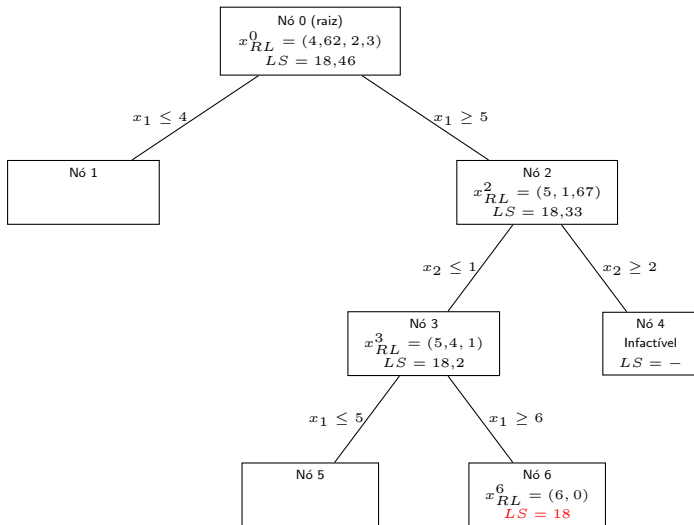
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

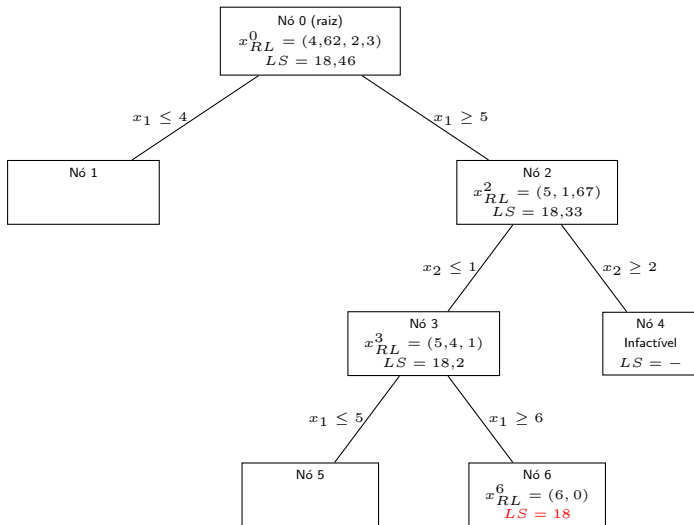
$$\begin{aligned}
 (S^6) \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \geq 6 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



▷ $x^* = \emptyset$; $LI = -\infty$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$



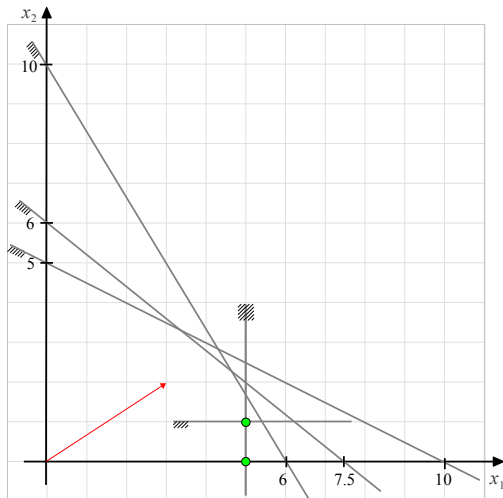
▷ $x^* = x_{RL}^6 = (6, 0)$; $LI = 18$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

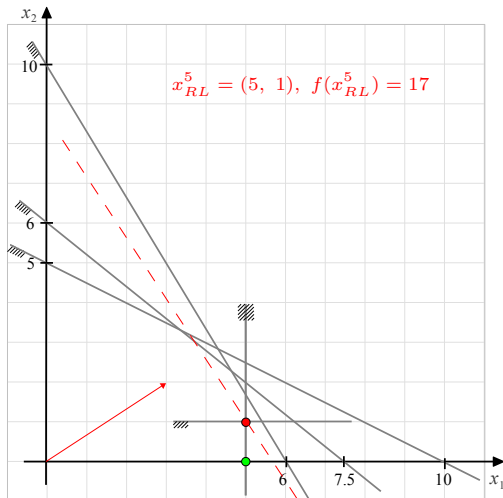
$$\begin{aligned}
 (S^5) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

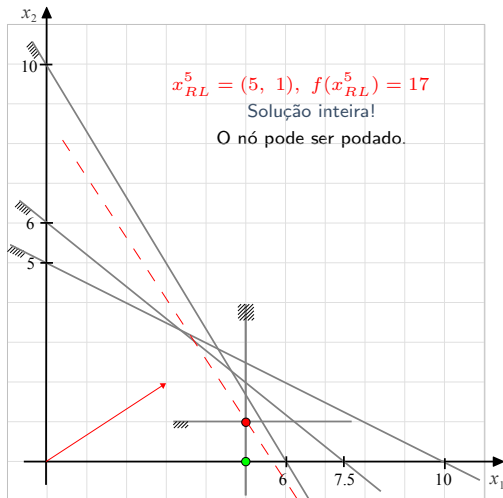
$$\begin{aligned}
 (S^5) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



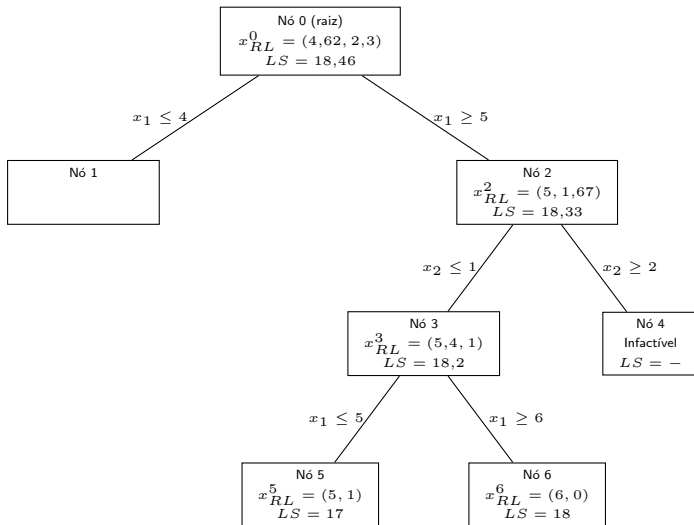
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^5) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 5, x_2 \leq 1, x_1 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



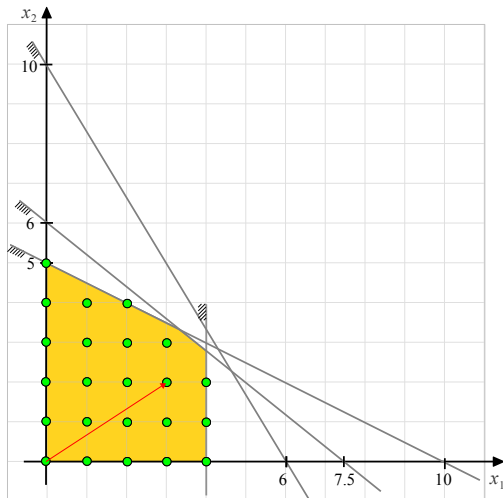
▷ $x^* = x_{RL}^6 = (6, 0)$; $LI = 18$; Nós: $\{\emptyset, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

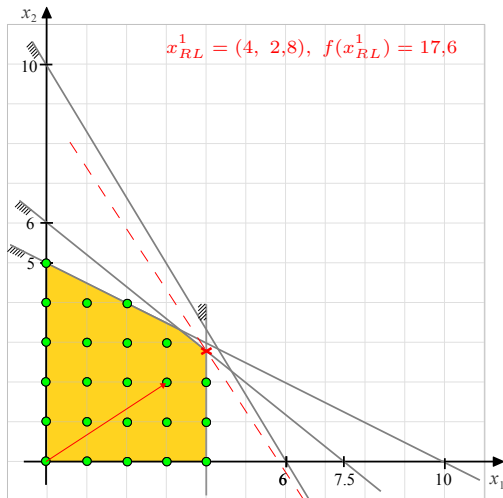
$$\begin{aligned}
 (S^1) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



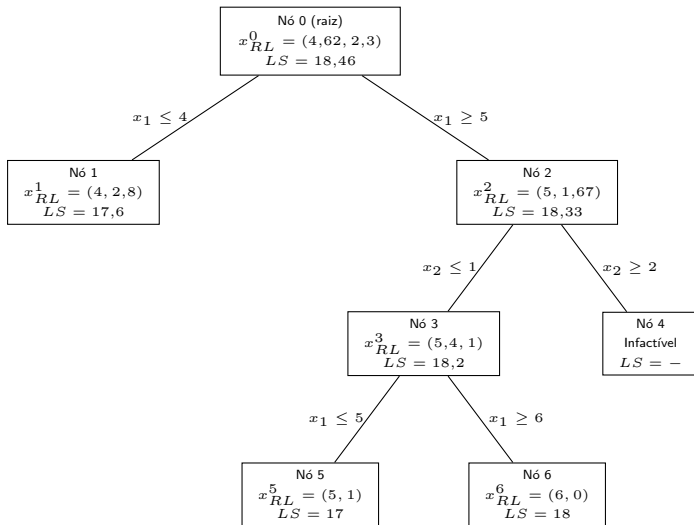
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^1) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



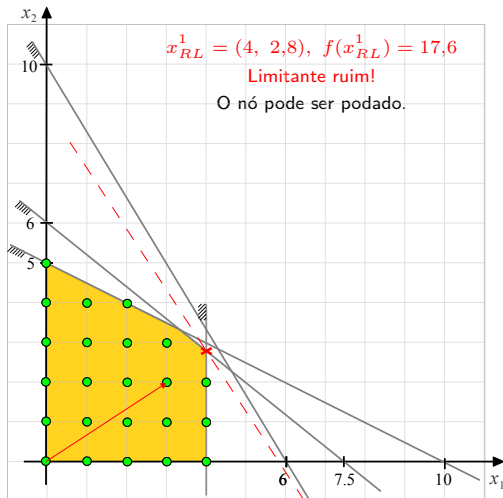
▷ $x^* = x_{RL}^6 = (6, 0)$; $LI = 18$; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \emptyset\}$



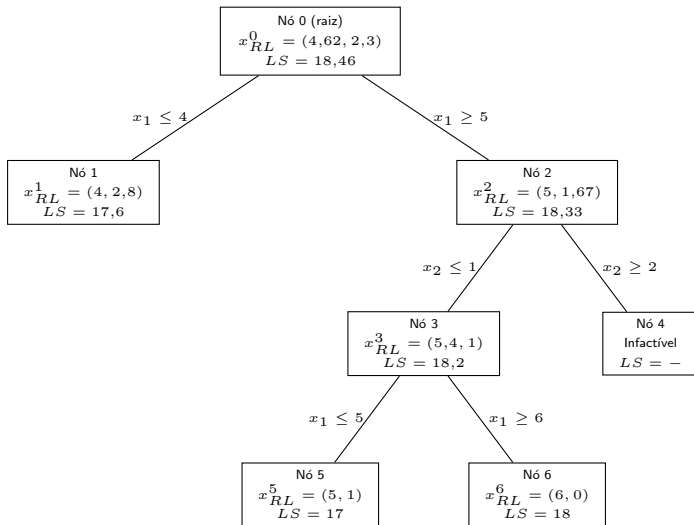
Método *branch-and-bound*

▷ Exemplo

$$\begin{aligned}
 (S^1) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \leq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



▷ $x^* = x_{RL}^6 = (6, 0)$; **LI = 18**; Nós: $\{\emptyset, \cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}\} \Rightarrow \text{FIM!}$



Método *branch-and-bound*

▷ Critérios de eliminação de nós

Método *branch-and-bound*

▷ Critérios de eliminação de nós

O i -ésimo nó da árvore *branch-and-bound* pode ser podado por:

Método *branch-and-bound*

▷ Critérios de eliminação de nós

O i -ésimo nó da árvore *branch-and-bound* pode ser podado por:

1. **Infactibilidade:** S^i é infactível. A região factível do subproblema é vazia e, assim, a solução ótima não pode ser obtida no ramo atual.

Método *branch-and-bound*

▷ Critérios de eliminação de nós

O i -ésimo nó da árvore *branch-and-bound* pode ser podado por:

1. **Infactibilidade:** S^i é infactível. A região factível do subproblema é vazia e, assim, a solução ótima não pode ser obtida no ramo atual.
2. **Qualidade:** $f(x_{RL}^i) \leq LI$ em um problema de maximização (minimização), ou $f(x_{RL}^i) \geq LS$ em um problema de minimização. Assim, mesmo que outras soluções inteiras possam ser obtidas no ramo atual, elas não terão valor melhor que o da solução incumbente.

Método *branch-and-bound*

▷ Critérios de eliminação de nós

O i -ésimo nó da árvore *branch-and-bound* pode ser podado por:

1. **Infactibilidade:** S^i é infactível. A região factível do subproblema é vazia e, assim, a solução ótima não pode ser obtida no ramo atual.
2. **Qualidade:** $f(x_{RL}^i) \leq LI$ em um problema de maximização (minimização), ou $f(x_{RL}^i) \geq LS$ em um problema de minimização. Assim, mesmo que outras soluções inteiras possam ser obtidas no ramo atual, elas não terão valor melhor que o da solução incumbente.
3. **Otimalidade:** x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade e, portanto, não há como ramificar.

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$,

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$,

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$,

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, $nós = \{0\}$;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, $\text{nós} = \{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Passo 7: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade, então

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Passo 7: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade, então

Se $f(x_{RL}^i) > LI$ então $x^* = x_{RL}^i$ e $LI = f(x_{RL}^i)$;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Passo 7: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade, então

Se $f(x_{RL}^i) > LI$ então $x^* = x_{RL}^i$ e $LI = f(x_{RL}^i)$;

Vá para o Passo 2;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Passo 7: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade, então

Se $f(x_{RL}^i) > LI$ então $x^* = x_{RL}^i$ e $LI = f(x_{RL}^i)$;

Vá para o Passo 2;

Passo 8: Selecione uma coordenada de x_{RL}^i com valor fracionário e crie dois novos nós impondo limites inferior e superior para esta coordenada;

Método *branch-and-bound*

▷ Algoritmo (maximização)

Entrada: Problema de programação inteira $\mathcal{P}$;

Saída: Solução ótima x^* , caso $x^* \neq \emptyset$; Problema sem solução, caso contrário;

Passo 1: Faça $S^0 = RL(\mathcal{P})$, $x^* = \emptyset$, $LI = -\infty$, nós = $\{0\}$;

Passo 2: Se a lista nós é vazia, então PARE!

Passo 3: Seja i o último nó não-processado da lista nós;

Passo 4: Resolva o subproblema S^i e marque i como processado;

Passo 5: Se S^i é infactível ou ilimitado, então vá para o Passo 2;

Passo 6: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz $f(x_{RL}^i) \leq LI$, então vá para o Passo 2;

Passo 7: Se a solução ótima x_{RL}^i satisfaz as restrições de integralidade, então

Se $f(x_{RL}^i) > LI$ então $x^* = x_{RL}^i$ e $LI = f(x_{RL}^i)$;

Vá para o Passo 2;

Passo 8: Selecione uma coordenada de x_{RL}^i com valor fracionário e crie dois novos nós impondo limites inferior e superior para esta coordenada;

Passo 9: Adicione os novos nós à lista nós e vá para o Passo 2.

Método *branch-and-bound*

- ▷ Ordem de processamento dos nós

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos.

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore.

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore. Em geral, tem-se as seguintes regras:

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore. Em geral, tem-se as seguintes regras:

1. Busca em **profundidade**: escolhe sempre o último nó da lista para processar. Favorece o aprofundamento de ramos e, assim, a obtenção de soluções factíveis;

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore. Em geral, tem-se as seguintes regras:

1. Busca em **profundidade**: escolhe sempre o último nó da lista para processar. Favorece o aprofundamento de ramos e, assim, a obtenção de soluções factíveis;
2. Busca em **largura**: escolhe sempre o primeiro nó da lista para processar. Assim, percorre-se a árvore nível-a-nível;

Método *branch-and-bound*

▷ Ordem de processamento dos nós

No Passo 9 do algoritmo anterior, fica em aberto em que posição da lista nós os novos nós devem ser inseridos. Essa escolha pode ser crítica, pois determina a ordem de processamento dos nós e influencia diretamente no tamanho da árvore. Em geral, tem-se as seguintes regras:

1. Busca em **profundidade**: escolhe sempre o último nó da lista para processar. Favorece o aprofundamento de ramos e, assim, a obtenção de soluções factíveis;
2. Busca em **largura**: escolhe sempre o primeiro nó da lista para processar. Assim, percorre-se a árvore nível-a-nível;
3. Busca pelo melhor limitante: os nós são processados em ordem crescente de limitante dado pelo relaxação. Em maximização (minimização), os nós com os maiores (menores) limitantes são processados antes, com o intuito de levar à solução ótima do problema mais rapidamente.

Método *branch-and-bound*

- ▷ Seleção da variável para ramificação

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar.

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica e influencia no tamanho da árvore.

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica e influencia no tamanho da árvore. Por exemplo, tem-se as seguintes regras:

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica e influencia no tamanho da árvore. Por exemplo, tem-se as seguintes regras:

1. Selecionar a variável “**mais fracionária**” (parte fracionária é mais próxima de 0,5);

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica e influencia no tamanho da árvore. Por exemplo, tem-se as seguintes regras:

1. Selecionar a variável “**mais fracionária**” (parte fracionária é mais próxima de 0,5);
2. Selecionar a variável que tenha o maior potencial de resultar em um bom limitante;

Método *branch-and-bound*

▷ Seleção da variável para ramificação

O Passo 8 do algoritmo também deixa em aberto qual o critério a ser usado para escolher em qual variável ramificar. Essa escolha também é crítica e influencia no tamanho da árvore. Por exemplo, tem-se as seguintes regras:

1. Selecionar a variável “**mais fracionária**” (parte fracionária é mais próxima de 0,5);
2. Selecionar a variável que tenha o maior potencial de resultar em um bom limitante;
3. Ramificar em uma soma de variáveis.

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

- ▶ A relaxação linear pode ser resolvida de outras formas, para alguns problemas específicos:

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

- ▶ A relaxação linear pode ser resolvida de outras formas, para alguns problemas específicos:
 - ▶ Por exemplo, *para o problema da mochila*, podemos resolver o problema de cada nó por **inspeção**, isto é, usando algum *algoritmo específico* para o problema, que seja mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim **garanta a solução ótima** da relaxação linear no nó (Ver Tópico 7.5).

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

- ▶ A relaxação linear pode ser resolvida de outras formas, para alguns problemas específicos:
 - ▶ Por exemplo, *para o problema da mochila*, podemos resolver o problema de cada nó por **inspeção**, isto é, usando algum *algoritmo específico* para o problema, que seja mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim **garanta a solução ótima** da relaxação linear no nó (Ver Tópico 7.5).
- ▶ Outras relaxações podem ser usadas em vez da relaxação linear:

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

- ▶ A relaxação linear pode ser resolvida de outras formas, para alguns problemas específicos:
 - ▶ Por exemplo, *para o problema da mochila*, podemos resolver o problema de cada nó por **inspeção**, isto é, usando algum *algoritmo específico* para o problema, que seja mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim **garanta a solução ótima** da relaxação linear no nó (Ver Tópico 7.5).
- ▶ Outras relaxações podem ser usadas em vez da relaxação linear:
 1. Relaxação Combinatória: descarta certas restrições do problema, mas ele continua sendo um problema de programação inteira;

Método *branch-and-bound*

▷ Relaxações

- ▶ A relaxação linear pode ser resolvida de outras formas, para alguns problemas específicos:
 - ▶ Por exemplo, *para o problema da mochila*, podemos resolver o problema de cada nó por **inspeção**, isto é, usando algum *algoritmo específico* para o problema, que seja mais fácil que o método simplex, mas que ainda assim **garanta a solução ótima** da relaxação linear no nó (Ver Tópico 7.5).
- ▶ Outras relaxações podem ser usadas em vez da relaxação linear:
 1. Relaxação Combinatória: descarta certas restrições do problema, mas ele continua sendo um problema de programação inteira;
 2. Relaxação Lagrangiana: penaliza a violação das restrições na função objetivo, usando multiplicadores de Lagrange.

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *branch-and-bound*:

1. Método *branch-and-cut*: gera restrições (cortes, desigualdades válidas) que eliminam soluções infactíveis (fracionárias ou inteiras infactíveis);

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *branch-and-bound*:

1. Método *branch-and-cut*: gera restrições (cortes, desigualdades válidas) que eliminam soluções infactíveis (fracionárias ou inteiras infactíveis); São a base dos softwares de otimização, usando cortes de propósito geral (gerados de forma automatizada);

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *branch-and-bound*:

1. Método *branch-and-cut*: gera restrições (cortes, desigualdades válidas) que eliminam soluções infactíveis (fracionárias ou inteiras infactíveis); São a base dos softwares de otimização, usando cortes de propósito geral (gerados de forma automatizada);
2. Método *branch-and-price*: reformula o problema de modo que as colunas (variáveis) possam ser geradas iterativamente;

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *branch-and-bound*:

1. Método *branch-and-cut*: gera restrições (cortes, desigualdades válidas) que eliminam soluções infactíveis (fracionárias ou inteiras infactíveis); São a base dos softwares de otimização, usando cortes de propósito geral (gerados de forma automatizada);
2. Método *branch-and-price*: reformula o problema de modo que as colunas (variáveis) possam ser geradas iterativamente; São baseados em reformulações que resultam em relaxações lineares mais fortes, em geral usando técnicas de decomposição.

Método *branch-and-bound*

▷ Importância

Atualmente, os algoritmos mais eficientes em programação inteira são baseados no método *branch-and-bound*:

1. Método *branch-and-cut*: gera restrições (cortes, desigualdades válidas) que eliminam soluções infactíveis (fracionárias ou inteiras infactíveis); São a base dos softwares de otimização, usando cortes de propósito geral (gerados de forma automatizada);
2. Método *branch-and-price*: reformula o problema de modo que as colunas (variáveis) possam ser geradas iterativamente; São baseados em reformulações que resultam em relaxações lineares mais fortes, em geral usando técnicas de decomposição.
3. Método *branch-price-and-cut*: combina as duas técnicas acima. Atualmente, é o único método capaz de obter soluções ótimas de problemas importantes em tempo viável, como roteamento de veículos, programação de produção, etc.

Método *branch-and-bound*

▷ Lista Semana 7, Exercício 5

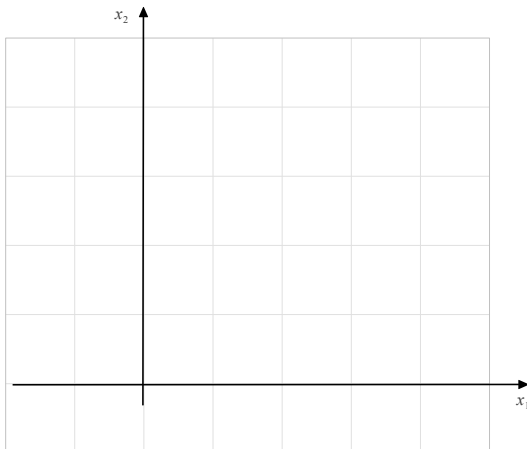
Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo usando o método *branch-and-bound* (busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária). Use o método gráfico para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

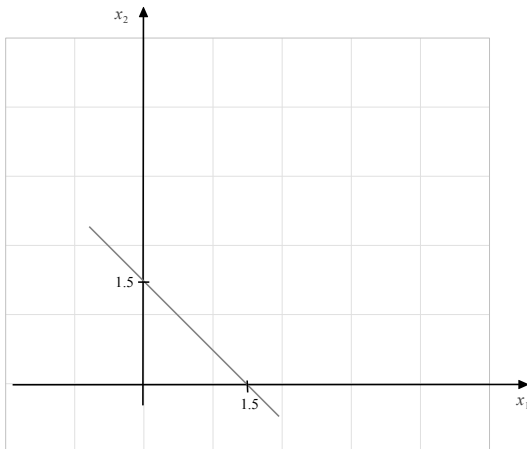
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

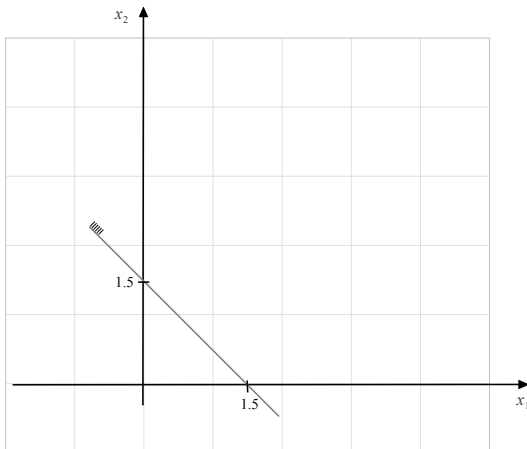
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

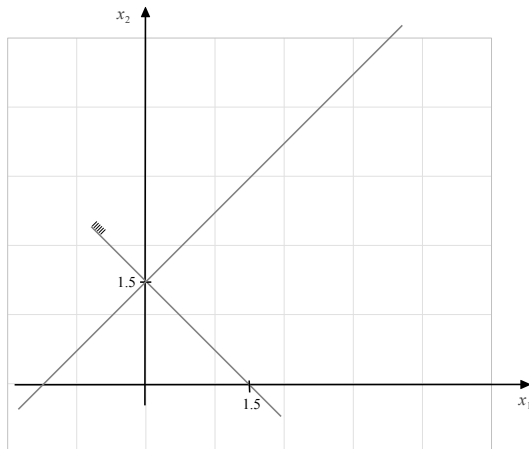
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

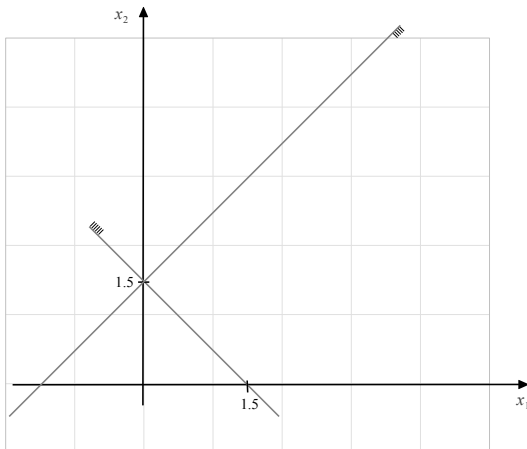
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

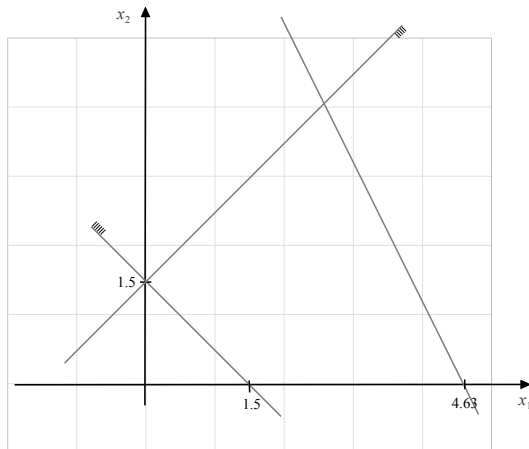
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

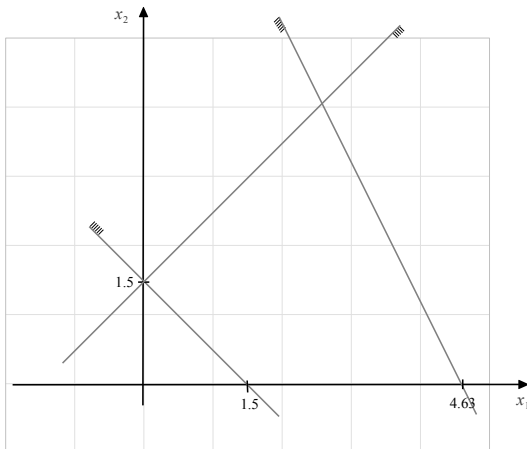
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

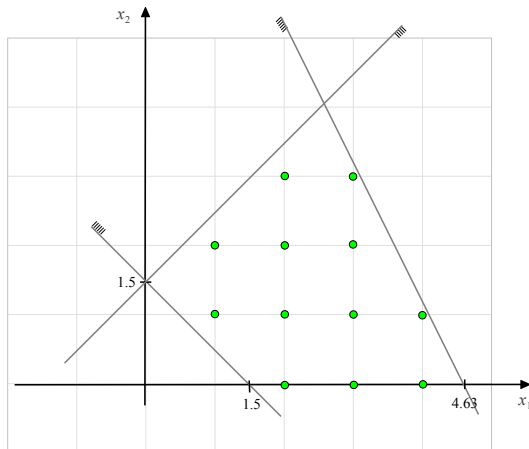
$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
 \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

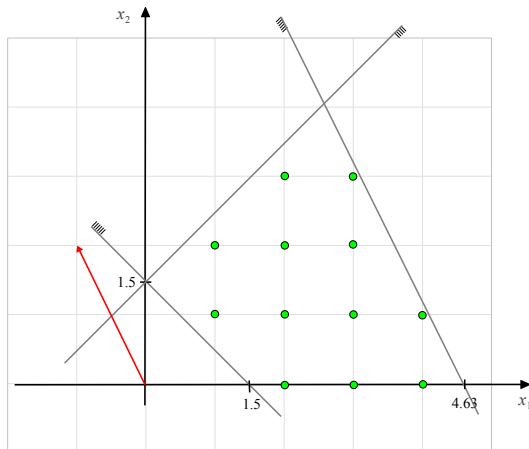
$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

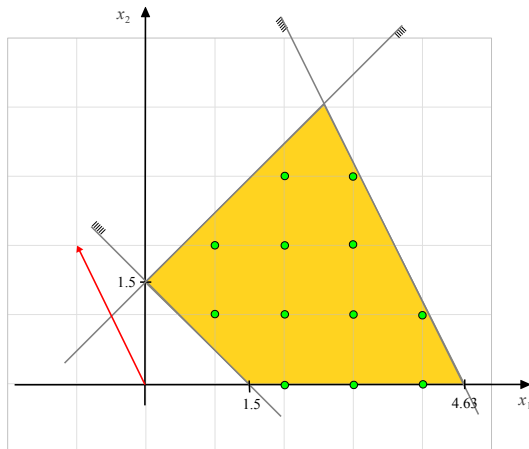
$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

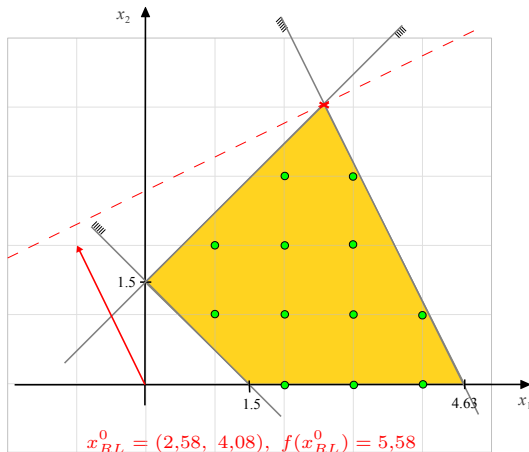
$$\begin{aligned}
 (S^0) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^0) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

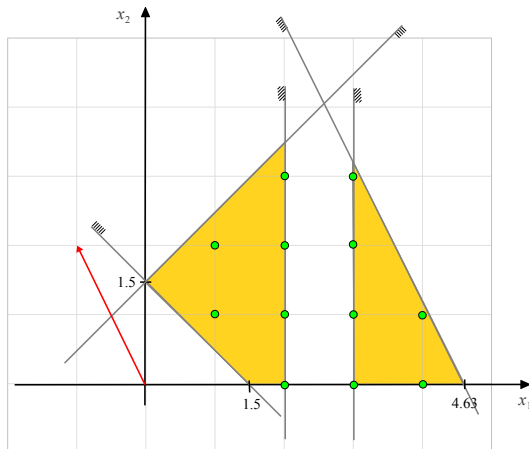


Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^1) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

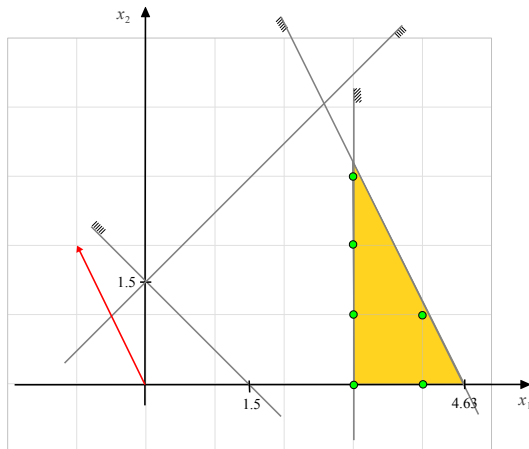
$$\begin{aligned}
 (S^2) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

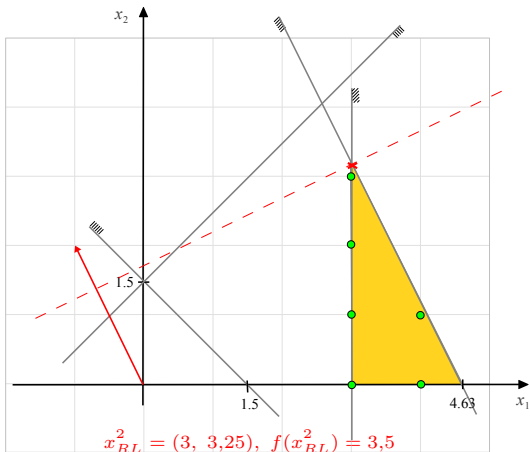
▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^2) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



$(S^2) \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$
 $\text{s.a} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 18,5 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$

$x_{RL}^2 = (3, 3,25), f(x_{RL}^2) = 3,5$

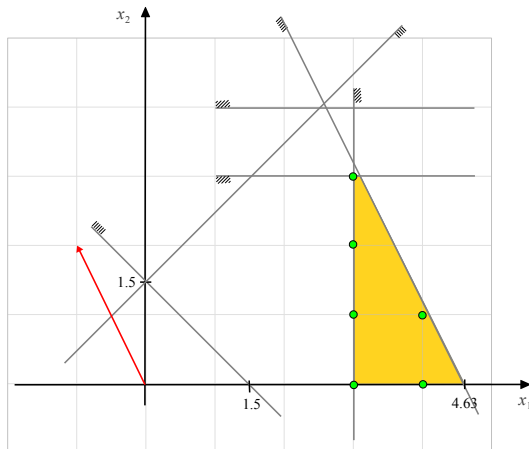


Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^3) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

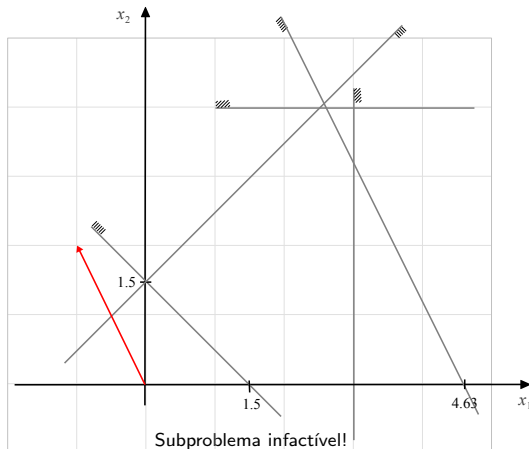
$$\begin{aligned}
 (S^4) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3, x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

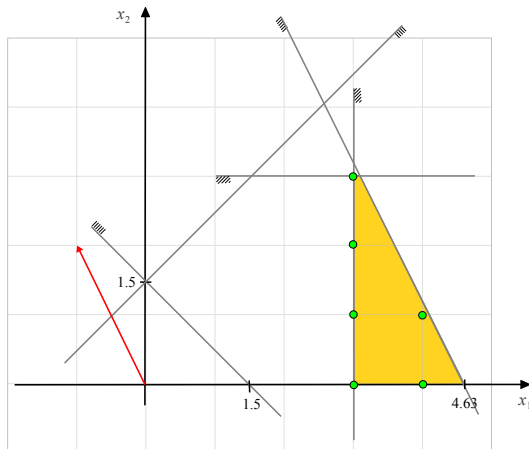
$$\begin{aligned}
 (S^4) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3, x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

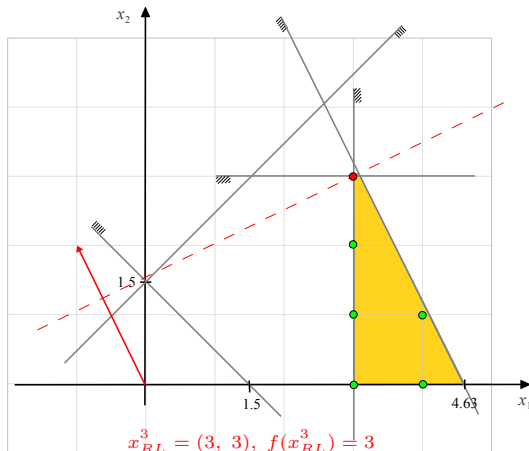
$$\begin{aligned}
 (S^3) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



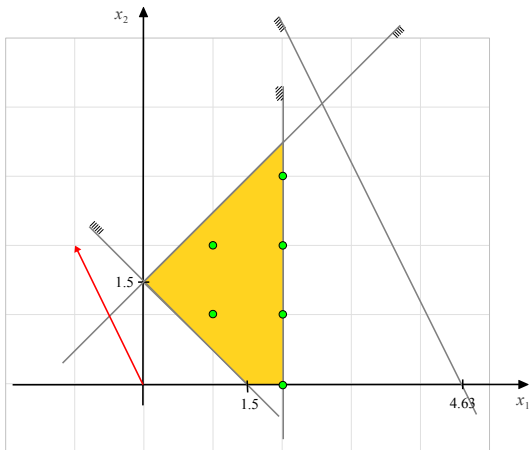
Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^3) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \geq 3, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



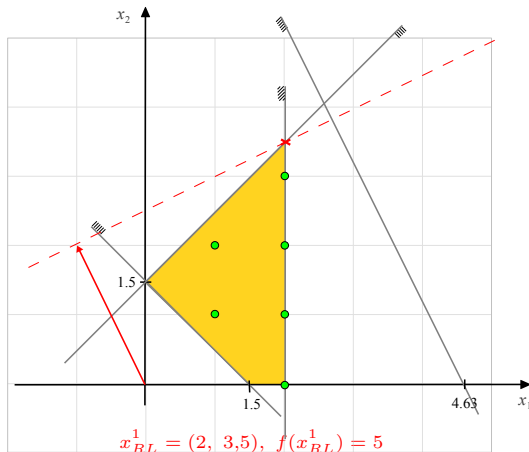
$(S^1) \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$
 $\text{s.a} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 18,5 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^1) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

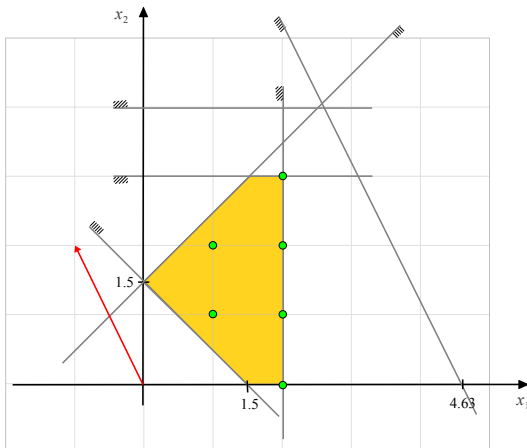


Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^5) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

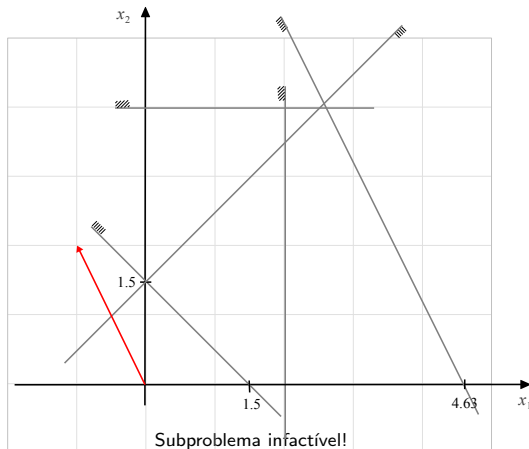
$$\begin{aligned}
 (S^6) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

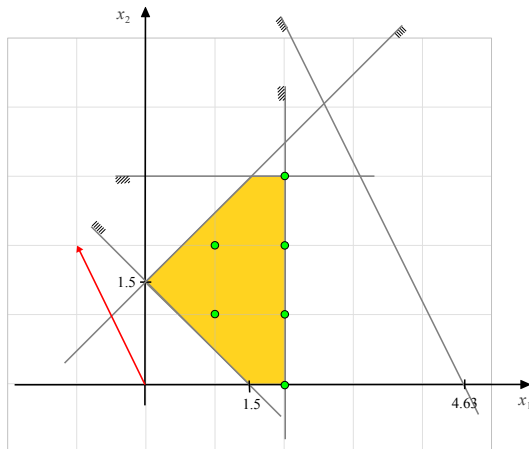
$$\begin{aligned}
 (S^6) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

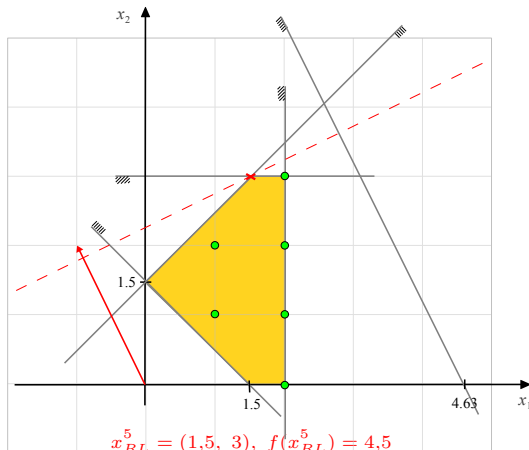
$$\begin{aligned}
 (S^5) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^5) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

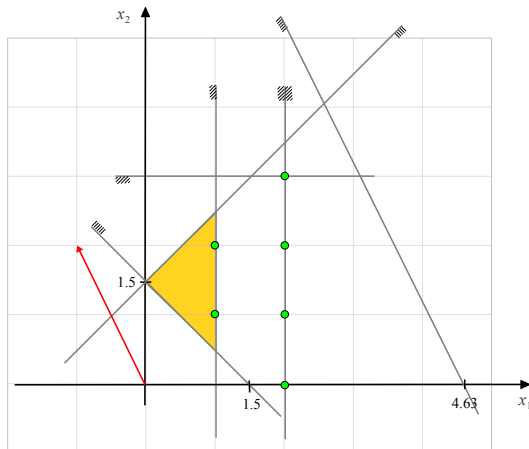


Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^7) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

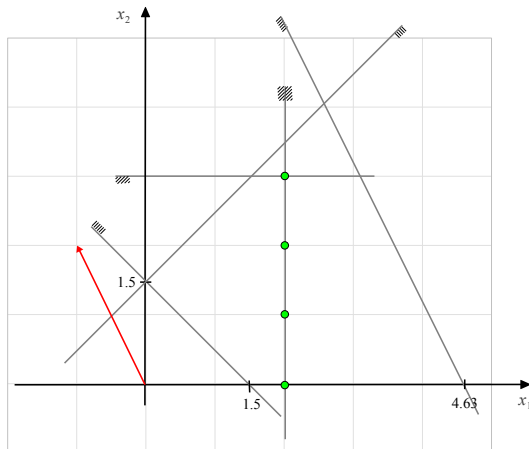
$$\begin{aligned}
 (S^8) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

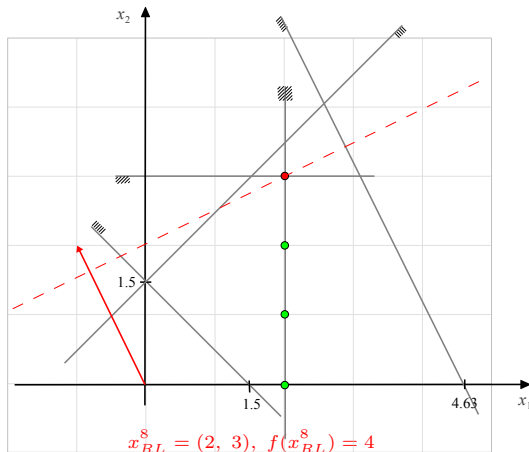
$$\begin{aligned}
 (S^8) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

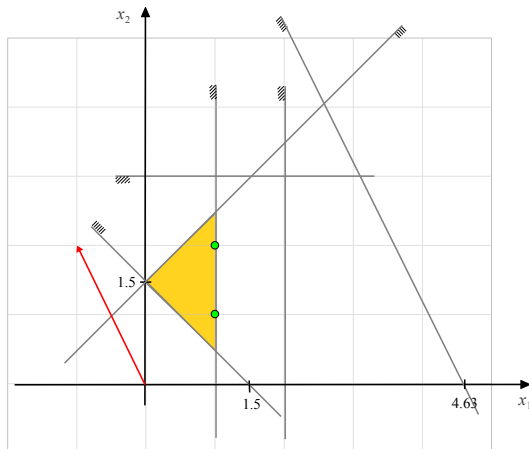
$$\begin{aligned}
 (S^8) \max \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

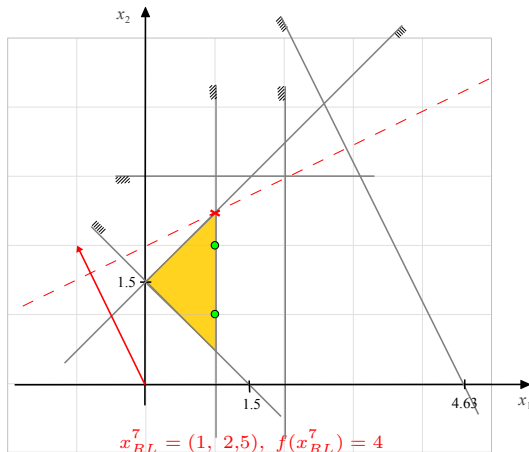
$$\begin{aligned}
 (S^7) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

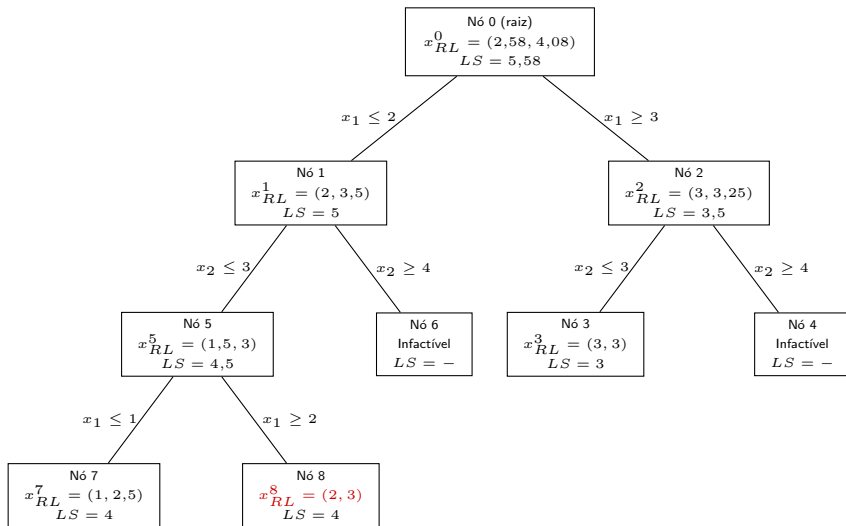


Método *branch-and-bound*

▷ Exercício Resolvido

$$\begin{aligned}
 (S^7) \quad & \max \quad f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$





- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?