



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 7.1: Modelos de Programação Linear Inteira

Apresentação

Objetivos desta semana:

- ▶ Conhecer os conceitos básicos de Programação Linear Inteira:
 - ▶ Modelos com variáveis inteiras e binárias;
 - ▶ Relaxação linear;
 - ▶ Arredondamento;
 - ▶ Método *branch-and-bound*;
- ▶ Fixar os conceitos por meio da resolução de exercícios.

Apresentação - Tópico 7.1

Objetivos deste tópico:

- ▶ Conhecer a nomenclatura em Programação Inteira;
- ▶ Entender como elaborar modelos com variáveis inteiras e binárias;
- ▶ Ver como expressar condições lógicas usando variáveis inteiras e binárias.

Vídeo-aula:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=F3H-whgy-QQ>

Programação inteira

Algumas variáveis do modelo devem assumir apenas valores inteiros (não-fracionários). Nomenclatura:

- ▶ **Programação inteira pura:** os modelos são descritos por variáveis inteiras apenas;
- ▶ **Programação inteira mista:** os modelos possuem variáveis fracionárias e variáveis inteiras;
- ▶ **Programação inteira binária:** os modelos são descritos por variáveis que podem ser iguais a 0 ou 1 somente.

Programação inteira

▷ Programação inteira pura

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_+$$

Programação inteira

▷ Programação inteira mista

$$\text{minimizar } f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d_1y_1 + \dots + d_py_p$$

$$\text{sujeito a } a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + h_{11}y_1 + \dots + h_{1p}y_p \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + h_{21}y_1 + \dots + h_{2p}y_p \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + h_{m1}y_1 + \dots + h_{mp}y_p = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$y_1, \dots, y_p \in \mathbb{Z}_+$$

Programação inteira

▷ Programação inteira binária

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$$

Programação inteira

▷ Exemplo

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas que são vendidas em barras de 1 ton. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. A tabela abaixo apresenta as composições das ligas e a matéria-prima disponível. Elabore um modelo de otimização para determinar quantas barras produzir de cada liga, de modo a maximizar a receita bruta, sabendo-se que as barras não podem ser fracionadas.

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

Programação inteira

▷ Exemplo

Obtemos o seguinte modelo de programação inteira:

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

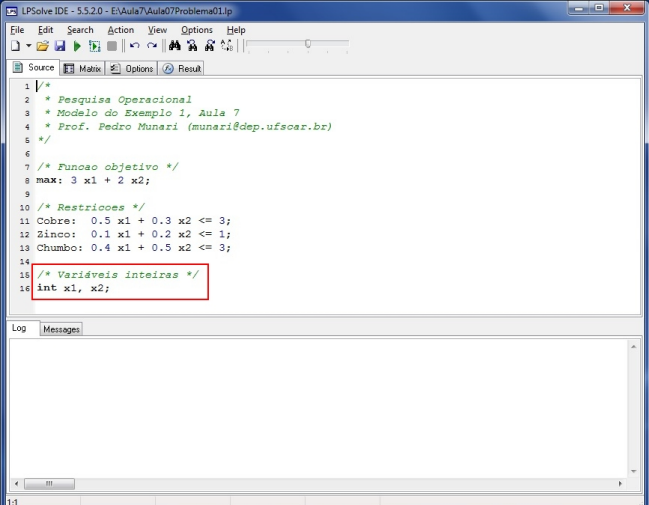
$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

Programação inteira

▷ Exemplo: lp_solve



The screenshot shows the LPSolve IDE interface. The title bar reads "LPSolve IDE - 5.5.2.0 - E:\Aula7\Aula07Problema01.lp". The menu bar includes File, Edit, Search, Action, View, Options, and Help. Below the menu is a toolbar with icons for file operations and solving. The main window has tabs for Source, Matrix, Options, and Result. The Source tab is active, displaying the following code:

```

1  /*
2  * Pesquisa Operacional
3  * Modelo do Exemplo 1, Aula 7
4  * Prof. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)
5  */
6
7  /* Funcao objetivo */
8  max: 3 x1 + 2 x2;
9
10 /* Restricoes */
11 Cobre: 0.5 x1 + 0.3 x2 <= 3;
12 Zinco: 0.1 x1 + 0.2 x2 <= 1;
13 Chumbo: 0.4 x1 + 0.5 x2 <= 3;
14
15 /* Variáveis inteiras */
16 int x1, x2;
    
```

A red rectangle highlights the integer variable declaration on lines 15 and 16. At the bottom of the window, there is a Log and Messages panel, which is currently empty. The status bar at the very bottom shows the line number 11.

Programação inteira

▷ Exemplo: lp_solve

The screenshot shows the LPsolve IDE 5.5.2.0 interface. The 'Result' tab is active, displaying a table of variables and their values. Below the table, the 'Log' window shows the solver's output, including iteration counts, pivot counts, and solving time.

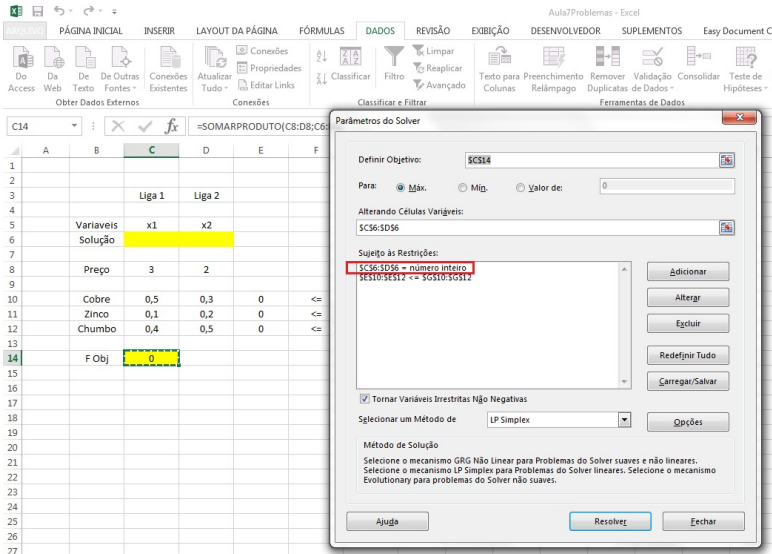
Variables	MILP ...	result
	18	18
x1	6	6
x2	0	0

Log Messages

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.0 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 5, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 1 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 5.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 7 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 4, 1.0x MIP order, 4 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 0.5, with a dynamic range of 5.
Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.003 seconds,
... 0.007 seconds in simplex solver, in total 0.010 seconds.
```

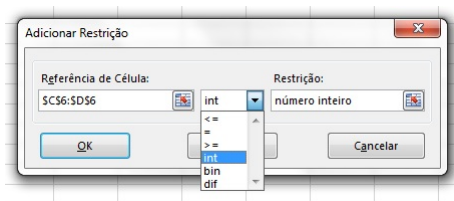
11 ITE: 4 INV: 4 NOD: 4 TME: 0,01

▷ Exemplo: Excel/Solver

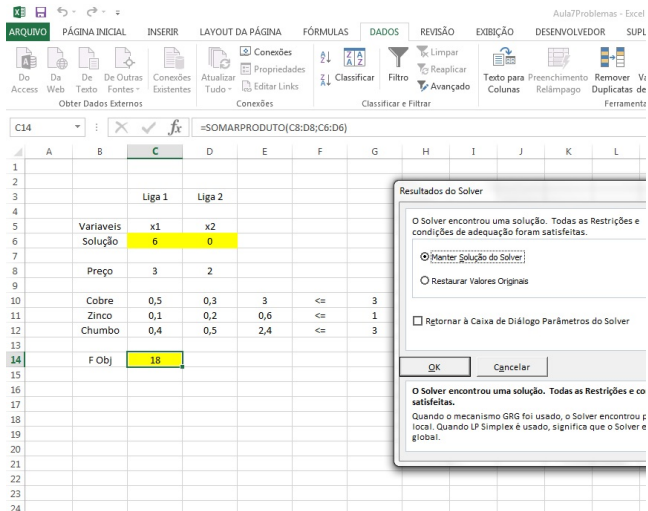


Programação inteira

▷ Exemplo: Excel/Solver



▷ Exemplo: Excel/Solver



Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

Um empresário está fazendo um planejamento para os próximos três anos. Ele tem disponível R\$ 25 milhões para investir anualmente e cinco projetos estão sob consideração. A tabela abaixo apresenta os retornos esperados para cada projeto ao final do terceiro ano e os desembolsos anuais. O empresário deseja determinar quais projetos ele deve selecionar, de modo a maximizar seu retorno total.

Projeto	Desembolso (milhões R\$)			Retorno (milhões R\$)
	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

- ▶ Variáveis de decisão?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

▶ Restrições?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

▶ Restrições?

Ano 1:

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

▶ Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

► Restrições?

Ano 1: $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$

Ano 2:

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

► Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 2: } 1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

► Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 2: } 1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

Ano 3:

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

► Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 2: } 1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 3: } 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 10x_5 \leq 25$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

▶ Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 2: } 1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 3: } 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 10x_5 \leq 25$$

▶ Função objetivo?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o investimento } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

▶ Restrições?

$$\text{Ano 1: } 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 2: } 1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$\text{Ano 3: } 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 10x_5 \leq 25$$

▶ Função objetivo?

$$\text{Maximizar } 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

$$\max f(x) = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

$$\text{s.a} \quad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

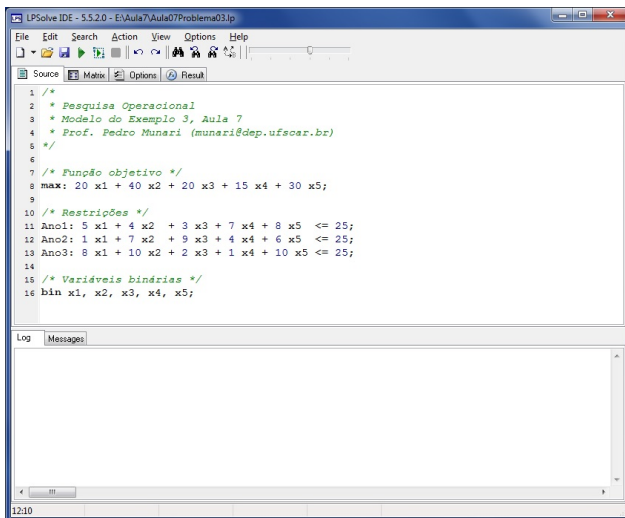
$$1x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 10x_5 \leq 25$$

$$x_1, \dots, x_5 \in \{0, 1\}$$

Programação inteira: Modelagem

► Exercício



The screenshot shows the LPSolve IDE interface with a file named 'E:\Aula7\Aula07Problema03.lp'. The 'Source' tab is active, displaying the following code:

```

1  /*
2  * Pesquisa Operacional
3  * Modelo do Exemplo 3, Aula 7
4  * Prof. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)
5  */
6
7  /* Função objetivo */
8  max: 20 x1 + 40 x2 + 20 x3 + 15 x4 + 30 x5;
9
10 /* Restrições */
11 Ano1: 5 x1 + 4 x2 + 3 x3 + 7 x4 + 8 x5 <= 25;
12 Ano2: 1 x1 + 7 x2 + 9 x3 + 4 x4 + 6 x5 <= 25;
13 Ano3: 8 x1 + 10 x2 + 2 x3 + 1 x4 + 10 x5 <= 25;
14
15 /* Variáveis binárias */
16 bin x1, x2, x3, x4, x5;
    
```

The interface includes a menu bar (File, Edit, Search, Action, View, Options, Help), a toolbar, and a status bar at the bottom showing the time 12:10.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

LPSolve IDE - 5.5.2.0 - E:\Aula7\Aula07Problema03.lp

File Edit Search Action View Options Help

Source Matrix Options Result

Objective Constraints Sensitivity

Variables	MILP Feasible	MILP Better	result
	85	95	95
x1	1	1	1
x2	0	1	1
x3	1	1	1
x4	1	1	1
x5	1	0	0

Log Messages

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.0 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 18, 2 (11.1%) were bound flips.
There were 6 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 2.7 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 10 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 5, 0.5x MIP order, 3 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 10, with a dynamic range of 10.
Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.003 seconds,
... 0.006 seconds in simplex solver, in total 0.009 seconds.
```

12:10 ITE: 17 INV: 14 NOD: 12 TME: 0,01

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.
- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.
- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.
- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.
- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.
- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.
- (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 ou o 3 forem.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.
- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.
- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.
- (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 ou o 3 forem.
- (e) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 e o 3 forem.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

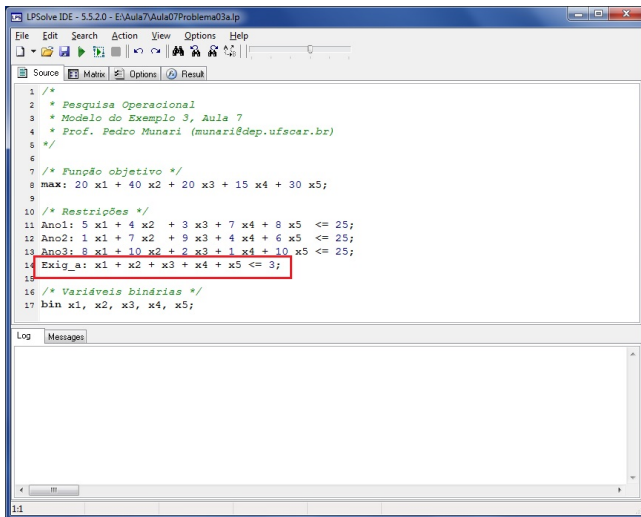
O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

Programação inteira: Modelagem

► Exercício



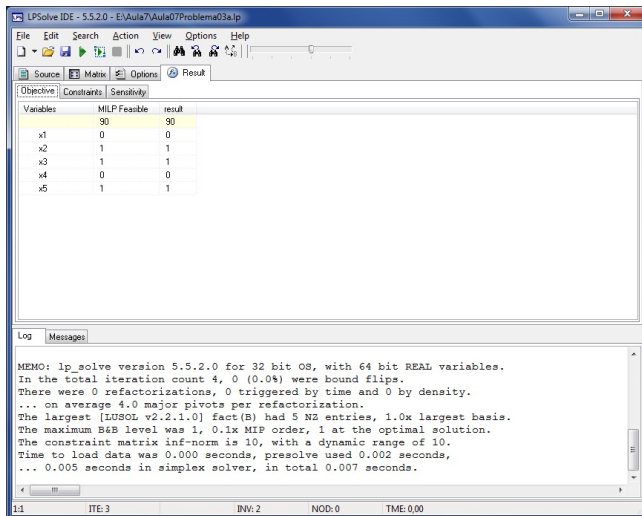
```
LP Solve IDE - 5.5.2.0 - E:\Aula7\Aula07Problema03a.lp
File Edit Search Action View Options Help
Source Matrix Options Result

1 /*
2  * Pesquisa Operacional
3  * Modelo do Exemplo 3, Aula 7
4  * Prof. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)
5  */
6
7 /* Função objetivo */
8 max: 20 x1 + 40 x2 + 20 x3 + 15 x4 + 30 x5;
9
10 /* Restrições */
11 Ano1: 5 x1 + 4 x2 + 3 x3 + 7 x4 + 8 x5 <= 25;
12 Ano2: 1 x1 + 7 x2 + 9 x3 + 4 x4 + 6 x5 <= 25;
13 Ano3: 8 x1 + 10 x2 + 2 x3 + 1 x4 + 10 x5 <= 25;
14 Exig_a: x1 + x2 + x3 + x4 + x5 <= 3;
15
16 /* Variáveis binárias */
17 bin x1, x2, x3, x4, x5;

Log Messages
1:1
```

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício



The screenshot shows the LPSolve IDE interface. The 'Result' tab is active, displaying a table of variables and their values. The table has three columns: 'Variables', 'MILP Feasible', and 'result'. The rows are labeled x1 through x5. The 'result' column shows values 90, 0, 1, 1, 0, and 1 respectively. Below the table, the 'Log' tab is active, showing a text log of the solver's execution. The log text includes version information, iteration counts, and timing details.

Variables	MILP Feasible	result
	90	90
x1	0	0
x2	1	1
x3	1	1
x4	0	0
x5	1	1

Log Messages

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.0 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 4, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 4.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 5 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 1, 0.1x MIP order, 1 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 10, with a dynamic range of 10.
Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.002 seconds,
... 0.005 seconds in simplex solver, in total 0.007 seconds.
```

1:1 ITE: 3 INV: 2 NOD: 0 TME: 0,00

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

- (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 ou o 3 forem.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

- (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 ou o 3 forem.

$$x_1 \leq x_5$$

$$x_3 \leq x_5$$

- (e) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 e o 3 forem.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

O que mudaria com as seguintes exigências?

- (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for.

$$x_2 \leq x_3$$

- (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o projeto 4 for.

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

- (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 ou o 3 forem.

$$x_1 \leq x_5$$

$$x_3 \leq x_5$$

- (e) O projeto 5 deve ser selecionado se o projeto 1 e o 3 forem.

$$x_1 + x_3 \leq x_5 + 1$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribuiu uma utilidade (quanto maior, mais útil), mostrada na tabela abaixo juntamente com o peso de cada objeto. Cada objeto é único, podendo ser levado ou não. O peso máximo que o alpinista pode carregar na mochila é 5 kg. Faça um modelo de programação inteira que auxilie o alpinista a decidir quais itens carregar.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Barra de cereal	6	200
Água	9	1000
Jaqueta	7	400
Tênis	3	400
Protetor solar	5	200
Garrafas de oxigênio	10	3000
Bússola	2	100
Máquina fotográfica	6	500

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

- ▶ Variáveis de decisão?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

- ▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

- ▶ Restrições?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

▶ Restrições?

Peso máximo:

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

► Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

► Restrições?

Peso máximo:

$$200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

▶ Restrições?

Peso máximo:

$$200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

▶ Função objetivo?

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

▶ Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 8.$$

▶ Restrições?

Peso máximo:

$$200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

▶ Função objetivo?

$$\text{Maximizar } 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

$$\max f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$$

$$\text{s.a} \quad 200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

$$x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\}$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

$$\max f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$$

$$\text{s.a} \quad 200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

$$x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\}$$

- ▶ Problemas como este são chamados de **Problema da Mochila**.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício

$$\max f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$$

$$\text{s.a } 200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

$$x_1, \dots, x_8 \in \{0, 1\}$$

- Problemas como este são chamados de **Problema da Mochila**.

De forma geral, são modelados como:

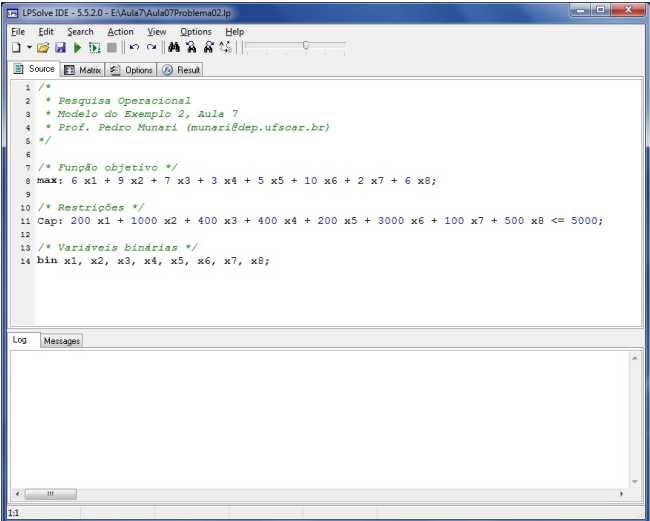
$$\max \quad f(x) = \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

$$\text{s.a } \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício: lp_solve



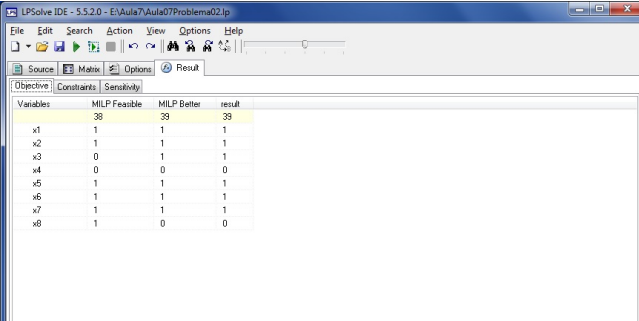
The screenshot shows the LPSolve IDE interface. The main window displays a source code file with the following content:

```
1 /*  
2  * Pesquisa Operacional  
3  * Modelo do Exemplo 2, Aula 7  
4  * Prof. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)  
5  */  
6  
7 /* Função objetivo */  
8 max: 6 x1 + 9 x2 + 7 x3 + 3 x4 + 5 x5 + 10 x6 + 2 x7 + 6 x8;  
9  
10 /* Restrições */  
11 Cap: 200 x1 + 1000 x2 + 400 x3 + 400 x4 + 200 x5 + 3000 x6 + 100 x7 + 500 x8 <= 5000;  
12  
13 /* Variáveis binárias */  
14 bin x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8;
```

The interface includes a menu bar (File, Edit, Search, Action, View, Options, Help), a toolbar with icons for file operations and solving, and a status bar at the bottom showing the file path and line numbers.

Programação inteira: Modelagem

▷ Exercício: lp_solve



The screenshot shows the LPSolve IDE 5.5.2.0 window. The 'Result' tab is active, displaying a table with the following data:

Variables	MILP Feasible	MILP Better	result
	38	39	39
x1	1	1	1
x2	1	1	1
x3	0	1	1
x4	0	0	0
x5	1	1	1
x6	1	1	1
x7	1	1	1
x8	1	0	0

Below the table, the 'Log' tab is active, showing the following text:

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.0 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 11, 2 (18.2%) were bound flips.
There were 4 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 2.3 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 3 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 5, 0.3x MIP order, 5 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 3000, with a dynamic range of 30.
Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.002 seconds,
... 0.005 seconds in simplex solver, in total 0.007 seconds.
```

At the bottom of the window, the status bar displays: 1:1 ITE: 10 INV: 10 NOD: 8 TME: 0,01

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?