



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 5.3: Teoria de Análise de Sensibilidade

Apresentação - Tópico 5.3

Objetivos deste tópico:

- ▶ Conhecer a teoria envolvida na Análise de Sensibilidade;
- ▶ Compreender como os softwares obtêm o Relatório de Sensibilidade a partir da iteração ótima do método simplex.

Vídeo-aula:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=uaTbCLa-U60>

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- ▶ Modificações nos recursos (b);

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- ▶ Modificações nos recursos (b);
- ▶ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c);

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- ▶ Modificações nos recursos (b);
- ▶ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c);

Obs.: Vamos sempre assumir que o problema está na forma padrão.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- ▶ Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- ▶ Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;
- ▶ Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- ▶ Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;
- ▶ Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$F(b) = b^T \bar{p}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T \bar{p} \\ &= b_1 \bar{p}_1 + b_2 \bar{p}_2 + \dots + b_m \bar{p}_m. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- ▶ Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;
- ▶ Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T \bar{p} \\ &= b_1 \bar{p}_1 + b_2 \bar{p}_2 + \dots + b_m \bar{p}_m. \end{aligned}$$

- ▶ Observando essa última expressão, qual seria a taxa de variação da função objetivo, caso um dado b_i fosse modificado?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b .

- ▶ Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b ;
- ▶ Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T \bar{x}$;
- ▶ Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T \bar{p} \\ &= b_1 \bar{p}_1 + b_2 \bar{p}_2 + \dots + b_m \bar{p}_m. \end{aligned}$$

- ▶ Observando essa última expressão, qual seria a taxa de variação da função objetivo, caso um dado b_i fosse modificado? R: $\bar{p}_i$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$F(b') = b_1 \bar{p}_1 + \dots + (b_i + \delta) \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + (b_i + \delta) \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \\ &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + b_i \bar{p}_i + \delta \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + (b_i + \delta) \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \\ &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + b_i \bar{p}_i + \delta \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \\ &= F(b) + \delta \bar{p}_i. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + (b_i + \delta) \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \\ &= b_1 \bar{p}_1 + \dots + b_i \bar{p}_i + \delta \bar{p}_i + \dots + b_m \bar{p}_m \\ &= F(b) + \delta \bar{p}_i. \end{aligned}$$

- Logo, essa modificação faz com que o valor da função objetivo seja alterado em $\delta \bar{p}_i$, assumindo-se que a **base ótima continue a mesma**.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- ▶ O que muda se alterarmos b ? (x_B ? p ? s ?)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- ▶ O que muda se alterarmos b ? (x_B ? p ? s ?)
- ▶ Precisamos garantir que $x'_B = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

Análise de sensibilidade

► Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b ? ($x_{\mathcal{B}}$? p ? s ?)
- Precisamos garantir que $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

$$x'_{\mathcal{B}} = B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + \delta \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \bar{x}_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b ? (x_B ? p ? s ?)
- Precisamos garantir que $x'_B = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

$$x'_B = B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + \delta \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \bar{x}_B + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

- Esta análise resulta em valores mínimos e máximos para δ , de modo que a base ótima de $F(b')$ seja a mesma de $F(b)$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- ▶ Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- ▶ Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- ▶ Para cada restrição i , p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- ▶ Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- ▶ Para cada restrição i , p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- ▶ Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_B = B^{-1}b' \geq 0$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- ▶ Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- ▶ Para cada restrição i , p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- ▶ Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_B = B^{-1}b' \geq 0$.

Exercício:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- ▶ Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- ▶ Para cada restrição i , p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- ▶ Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_B = B^{-1}b' \geq 0$.

Exercício:

- ▶ No problema das ligas metálicas, determine o intervalo de variação do estoque de Cobre ($b_1 = 3$) para o qual a análise de sensibilidade é válida.

Problema das ligas metálicas

► Iteração ótima do método simplex

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 5,36$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 0,78$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- É possível melhorar essa solução?
- **Não!** Os custos relativos são ≥ 0 .
- Portanto: **solução ótima encontrada!**
- $x^* = (4,62, 2,3, 0, 0,08, 0)$;
- $f(x^*) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18,46$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- ▶ Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- ▶ Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- ▶ Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- ▶ Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,84\delta \\ 0,23\delta \\ -3,07\delta \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20;$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;
- ▶ $2,30 - 3,07\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;
- ▶ $2,30 - 3,07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2,30/-3,07$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;
- ▶ $2,30 - 3,07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2,30/-3,07 \Rightarrow \delta \leq 0,75$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;
- ▶ $2,30 - 3,07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2,30/-3,07 \Rightarrow \delta \leq 0,75$
- ▶ Fazendo a intersecção dos três intervalos obtidos, concluímos que para δ entre $-0,35$ e $0,75$ a base atual permanece ótima.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- ▶ A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ :
- ▶ $4,62 + 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4,62/3,84 \Rightarrow \delta \geq -1,20$;
- ▶ $0,08 + 0,23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,08/0,23 \Rightarrow \delta \geq -0,35$;
- ▶ $2,30 - 3,07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2,30/-3,07 \Rightarrow \delta \leq 0,75$
- ▶ Fazendo a intersecção dos três intervalos obtidos, concluímos que para δ entre $-0,35$ e $0,75$ a base atual permanece ótima.
- ▶ Obs.: Devido aos arredondamentos feitos no cálculo da inversa e de outras operações, o resultado ficou ligeiramente diferente do obtido pelos softwares.

Análise de sensibilidade

▷ Pelo relatório do Excel...

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12							
13							
14	Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido		
15	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
16	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
17	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
18	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ **Entretanto**, as análises com preço-sombra são válidas **SOMENTE** dentro das variações indicadas nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir
- ▶ Por exemplo, a variação de 5,38/ton no valor ótimo é garantida apenas se o estoque de Cobre variar entre 2,67 e 3,75;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- ▶ Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- ▶ Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- ▶ O que muda se alterarmos c ? (x_B ? p ? s ? Valor ótimo?)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- ▶ Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- ▶ O que muda se alterarmos c ? (x_B ? p ? s ? Valor ótimo?)
- ▶ Sendo $\mathcal{B}$ a base ótima e B a matriz básica correspondente, a solução ótima dual é dada por $\bar{p}^T = c_B^T B^{-1}$, com os custos relativos $s_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $j \in \mathcal{N}$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- ▶ Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- ▶ O que muda se alterarmos c ? (x_B ? p ? s ? Valor ótimo?)
- ▶ Sendo $\mathcal{B}$ a base ótima e B a matriz básica correspondente, a solução ótima dual é dada por $\bar{p}^T = c_B^T B^{-1}$, com os custos relativos $s_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $j \in \mathcal{N}$.
- ▶ Se c_k é o custo de uma variável não-básica, então a modificação pode ter impacto em um único custo relativo (Caso 1). Caso contrário, tanto a solução dual quanto todos os custos relativos podem mudar (Caso 2).

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- ▶ Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$s'_k = c_k + \delta - \bar{p}^T a_k$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned}s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta\end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned}s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta.\end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ .

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned}s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta.\end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ .
- Como garantir que a base continuará ótima?

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ .
- Como garantir que a base continuará ótima?

$$R: s_k + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -s_k.$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned}s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta.\end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ .
- Como garantir que a base continuará ótima?
 $R: s_k + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -s_k$.
- De fato, $\delta < -s_k \Rightarrow s'_k < 0$ e, assim, x_k deveria entrar na base.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos

$$c'_B = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_N = c_N.$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos

$$c'_B = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_N = c_N.$$

- ▶ $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos

$$c'_B = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_N = c_N.$$

- ▶ $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- ▶ A nova solução dual é dada por:

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
 $c'_B = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_N = c_N.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$p'^T = c'^T_B B^{-1}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
 $c'_B = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_N = c_N.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned} p'^T &= c'^T B^{-1} \\ &= (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
 $c'_\mathcal{B} = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_\mathcal{N} = c_\mathcal{N}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned} p'^T &= c'^T_\mathcal{B} B^{-1} \\ &= (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \\ &= p^T + (0, \dots, \delta, \dots, 0) B^{-1}. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
 $c'_\mathcal{B} = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_\mathcal{N} = c_\mathcal{N}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned}
 p'^T &= c'^T_\mathcal{B} B^{-1} \\
 &= (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \\
 &= p^T + (0, \dots, \delta, \dots, 0) B^{-1}. \\
 &= p^T + \delta [B^{-1}]_l.
 \end{aligned}$$

$([B^{-1}]_l)$: l -ésima linha da matriz inversa)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$s'_j = c'_j - p'^T a_j$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- ▶ Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned}s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j\end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned}s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j\end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned}s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j.\end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l) a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j. \end{aligned}$$

- Como garantir que a base continuará ótima?

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = B_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned}s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j.\end{aligned}$$

- Como garantir que a base continuará ótima?

$$R: s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l) a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j. \end{aligned}$$

- Como garantir que a base continuará ótima?

$$R: s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0 \Rightarrow \delta[B^{-1}]_l a_j \leq s_j.$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- ▶ Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- ▶ Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- ▶ Caso contrário, se o custo da l -ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e **todos** os custos relativos podem mudar (Caso 2);

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- ▶ Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- ▶ Caso contrário, se o custo da l -ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e **todos** os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- ▶ Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l -ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e **todos** os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
 - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l -ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e **todos** os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
 - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;
 - Caso 2: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$.

Exercício:

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l -ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e **todos** os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
 - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;
 - Caso 2: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$.

Exercício:

- No problema das ligas metálicas, determine o intervalo de variação do preço da Liga 1 ($c_1 = 3$) de modo que a solução ótima não se altere.

Problema das ligas metálicas

► Iteração ótima do método simplex

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 5,36$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 0,78$$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- É possível melhorar essa solução?
- **Não!** Os custos relativos são ≥ 0 .
- Portanto: **solução ótima encontrada!**
- $x^* = (4,62, 2,3, 0, 0,08, 0)$;
- $f(x^*) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18,46$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- ▶ Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- ▶ A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- ▶ Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- ▶ A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5,36 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5,36 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5,36 - 3,84\delta \geq 0$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5,36 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5,36 - 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 1,4$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na **forma padrão** e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p , s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5,36 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5,36 - 3,84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 1,4$$
- Logo, pelo custo relativo s_3 , podemos mudar c_1 de -3 até $-1,6 (= -3 + 1,4)$ sem alterar a base ótima.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- ▶ Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

► Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

► Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0,78 + 2,30\delta \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

► Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0,78 + 2,30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,34$$

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0,78 + 2,30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,34$$

- Logo, pelo custo relativo s_5 , podemos mudar c_1 de -3 até $-3,34 (= -3 - 0,34)$ sem alterar a base ótima.

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0,78 + 2,30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,34$$
- Logo, pelo custo relativo s_5 , podemos mudar c_1 de -3 até $-3,34 (= -3 - 0,34)$ sem alterar a base ótima.
- Concluindo, *para o problema na forma padrão*, temos que ao variarmos c_1 de $-3,34$ a $-1,6$ a solução ótima se mantém a mesma.

Análise de sensibilidade

► Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0,78 - \delta(3,84 \ 0 \ -2,30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0,78 + 2,30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0,34$$
- Logo, pelo custo relativo s_5 , podemos mudar c_1 de -3 até $-3,34 (= -3 - 0,34)$ sem alterar a base ótima.
- Concluindo, *para o problema na forma padrão*, temos que ao variarmos c_1 de $-3,34$ a $-1,6$ a solução ótima se mantém a mesma.
- Portanto, para o problema das ligas metálicas, o intervalo de variação do custo da liga 1 é de $1,6$ a $3,34$.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?