



Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Produção



# Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025  
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 4.2: Degeneração

# Apresentação

## Objetivos deste tópico:

- ▶ Entender o que é degeneração em programação linear e quais as suas implicações para o método simplex.

## Vídeo-aula:

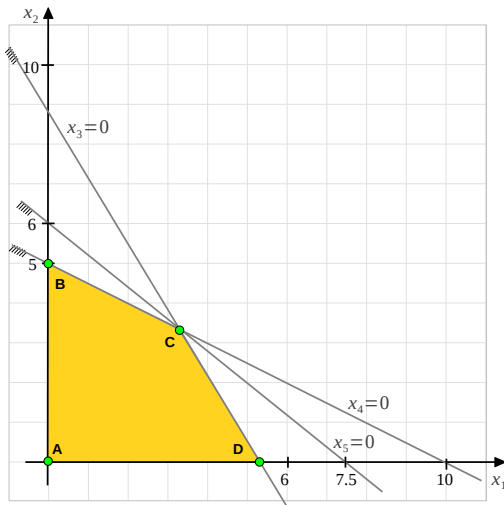
- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=AnYWF34Ft9U>

# Degeneração

- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;

# Degeneração

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Degeneração

- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;

# Degeneração

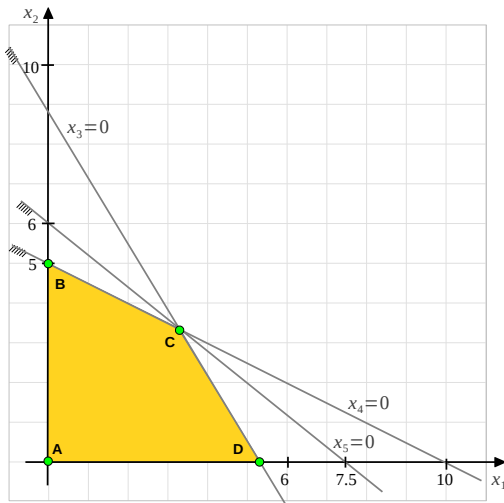
- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;
- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;

# Degeneração

- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;
- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- ▶ Podemos ter  $s_j = 0$  mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;

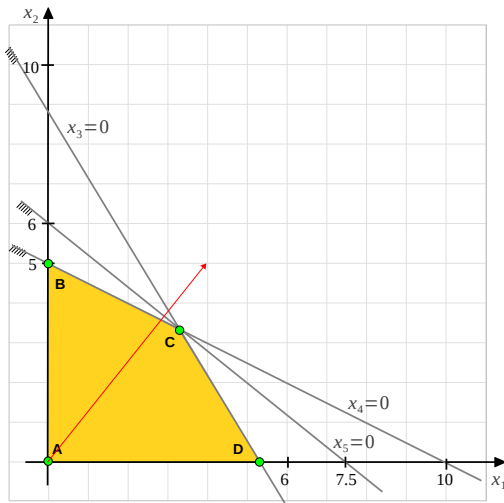
# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



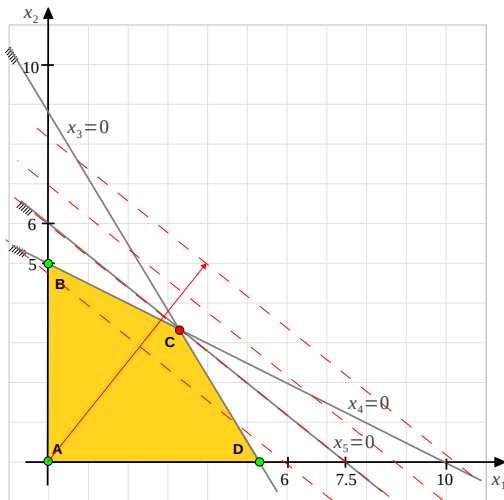
# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Degeneração: Exemplo 1

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$\begin{array}{l} c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- $x_2$  entra na base.

- Teste da razão:

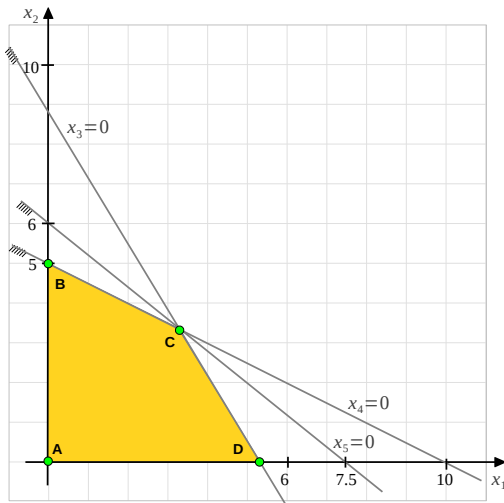
$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

- $x_4$  sai da base.

# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Degeneração: Exemplo 1

Iteração 2:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,167 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -1,5$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 25$$

$$\begin{array}{l} c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- $x_1$  entra na base.

- Teste da razão:

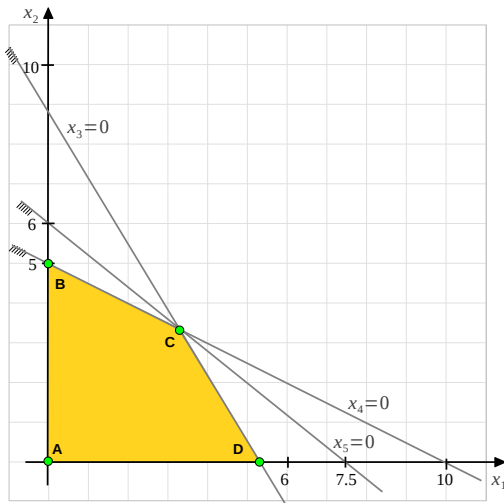
$$y = B^{-1}a_1 \approx \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \approx 3,33$$

- $x_5$  sai da base.

# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



# Degeneração: Exemplo 1

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & 4,33 & -2,33 \\ 0 & 13,3 & -3,33 \\ 0 & -16,7 & 6,67 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ 0 \ -10]$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 10$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

- **PARE:** solução ótima encontrada!
- Poderíamos colocar  $x_4$  na base, sem alterar o valor ótimo.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 \approx \begin{bmatrix} 4,33 \\ 13,33 \\ -16,67 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0$$

- $x_3$  sai da base.

# Degeneração: Exemplo 1

Para  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \\ 3,84 & 0 & -2,30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 10$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.

# Degeneração: Exemplo 1

Para  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \\ 3,84 & 0 & -2,30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 10$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.
- $x^* = (3,33, 3,33, 0, 0, 0)$

# Degeneração: Exemplo 1

Para  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \\ 3,84 & 0 & -2,30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3,33 \\ 3,33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 10$$

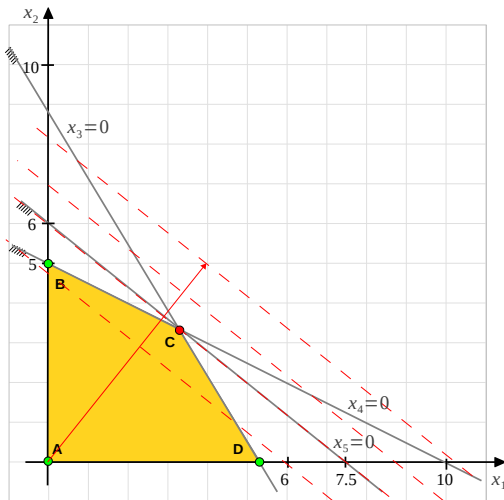
$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.
- $x^* = (3,33, 3,33, 0, 0, 0)$
- Portanto, a solução ótima é única!

# Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Degeneração

- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{\mathcal{B}_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;
- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- ▶ Podemos ter  $s_j = 0$  mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;

# Degeneração

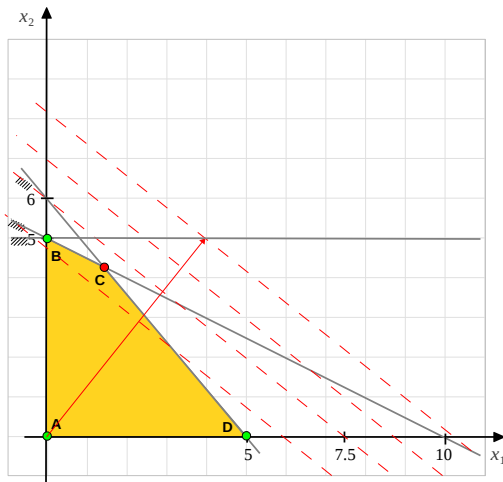
- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;
- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- ▶ Podemos ter  $s_j = 0$  mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;
- ▶ Degeneração pode **aumentar o número de iterações** desnecessariamente e **causar ciclagem**: o método troca de bases mas continua no mesmo ponto extremo, sem convergir;

# Degeneração

- ▶ Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- ▶ Em uma base degenerada, temos  $x_{\mathcal{B}_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ ;
- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- ▶ Podemos ter  $s_j = 0$  mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;
- ▶ Degeneração pode **aumentar o número de iterações** desnecessariamente e **causar ciclagem**: o método troca de bases mas continua no mesmo ponto extremo, sem convergir;
- ▶ Na prática, exige regras especiais para evitar ciclagem.

## Degeneração: Exemplo 2

$$\begin{array}{ll}
 \max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a} & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\
 & 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$



## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).
- Teste da razão:

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).
- Teste da razão:

$$y =$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 =$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{30}{5}, \frac{5}{1}, \frac{10}{2} \right\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{6, \textcolor{red}{5}, 5\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{6, \mathbf{5}, \mathbf{5}\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1:  $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 2\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = -5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_2$  entrará na base ( $k = 2$ ).

- Teste da razão:

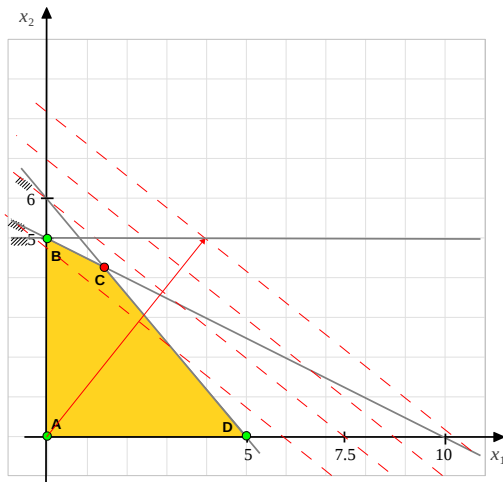
$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{6, \mathbf{5}, \mathbf{5}\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_2}$  ( $x_4$ ) sairá da base.

## Degeneração: Exemplo 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\
 & 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 2:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$  e  $\mathcal{N} = \{1, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = -4$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 5$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_1$  entrará na base ( $k = 1$ ).

- Teste da razão:

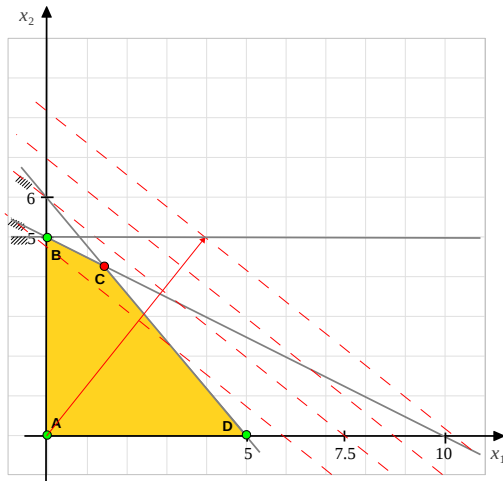
$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \min \{0, 83; \emptyset; 0\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} = 0$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_3}$  ( $x_5$ ) sairá da base.

## Degeneração: Exemplo 2

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
 & 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\
 & 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $B = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 =$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 =$$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.
- Fizemos uma iteração a mais, trocando de base sem sair do lugar :(

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{degenerada!})$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$\boxed{\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.
- Fizemos uma iteração a mais, trocando de base sem sair do lugar :(
- Devemos tomar cuidado para não ciclar!  
(caso haja novo empate no teste da razão)

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).
- Teste da razão:

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).
- Teste da razão:

$$y =$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 =$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \emptyset \right\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{5}{7}, \frac{5}{1}, \emptyset \right\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{0,71; 5; \emptyset\}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{0,71; 5; \emptyset\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0,71$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 4\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 3 \quad -4]$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

$$\begin{aligned} c^T &= \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $x_4$  entrará na base ( $k = 4$ ).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{0,71; 5; \emptyset\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0,71$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_1} (x_3)$  sairá da base.

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $B = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

► Calcular os custos relativos:

$$p^T =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

► Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

► Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,000 & -1,429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

► Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,000 & -1,429 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 =$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

► Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

► Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,000 & -1,429 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0,429$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 1,429$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $B = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,000 & -1,429 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0,429$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 1,429$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- **PARE!** Os custos relativos são  $\geq 0$ .
- Solução ótima encontrada!

## Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4:  $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$  e  $\mathcal{N} = \{5, 3\}$ ;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 1,000 & -0,857 \\ -0,143 & 0,000 & 0,857 \\ 0,286 & 0,000 & -0,714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,714 \\ 4,286 \\ 1,429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,429 & 0,000 & -1,429 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 0,429$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 1,429$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- **PARE!** Os custos relativos são  $\geq 0$ .
- Solução ótima encontrada!
- $x^* = (1,43; 4,29; 0, 0,71; 0)$ ;
- $c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}^* = -27,14$ ;

# Degeneração

## ▷ Resumindo...

- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é,  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ );

# Degeneração

## ▷ Resumindo...

- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é,  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ );
- ▶ Possíveis consequências:
  - ▶ Podemos ter uma única solução ótima mesmo quando  $s_j = 0$ ;

# Degeneração

## ▷ Resumindo...

- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é,  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ );
- ▶ Possíveis consequências:
  - ▶ Podemos ter uma única solução ótima mesmo quando  $s_j = 0$ ;
  - ▶ O número de iterações pode aumentar desnecessariamente;

# Degeneração

## ▷ Resumindo...

- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é,  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ );
- ▶ Possíveis consequências:
  - ▶ Podemos ter uma única solução ótima mesmo quando  $s_j = 0$ ;
  - ▶ O número de iterações pode aumentar desnecessariamente;
  - ▶ Pode ocorrer **ciclagem**: o método repete as trocas de bases, sem convergir para uma solução ótima.

# Degeneração

## ▷ Resumindo...

- ▶ Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é,  $x_{B_i} = 0$  para pelo menos um  $i = 1, \dots, m$ );
- ▶ Possíveis consequências:
  - ▶ Podemos ter uma única solução ótima mesmo quando  $s_j = 0$ ;
  - ▶ O número de iterações pode aumentar desnecessariamente;
  - ▶ Pode ocorrer **ciclagem**: o método repete as trocas de bases, sem convergir para uma solução ótima.
- ▶ Existem diversas formas de contornar esses problemas na prática, usando regras que são comumente implementadas nos softwares de otimização.

# Degeneração

- ▷ Formas de se evitar ciclagem ou excesso de iterações

# Degeneração

▷ Formas de se evitar ciclagem ou excesso de iterações

▶ Perturbação (aleatória) dos vetores de soluções. Por exemplo:

▶  $x = x + \epsilon \tilde{\theta}$ , onde  $\tilde{\theta}$  é um vetor de números aleatórios entre 0 e 1, e  $\epsilon$  é uma constante suficientemente pequena (!);

# Degeneração

## ▷ Formas de se evitar ciclagem ou excesso de iterações

- ▶ Perturbação (aleatória) dos vetores de soluções. Por exemplo:
  - ▶  $x = x + \epsilon \tilde{\theta}$ , onde  $\tilde{\theta}$  é um vetor de números aleatórios entre 0 e 1, e  $\epsilon$  é uma constante suficientemente pequena (!);
  - ▶ Muito usada em implementações computacionais, mas deve-se ter cuidado!

# Degeneração

## ► Formas de se evitar ciclagem ou excesso de iterações

- Perturbação (aleatória) dos vetores de soluções. Por exemplo:
  - $x = x + \epsilon \tilde{\theta}$ , onde  $\tilde{\theta}$  é um vetor de números aleatórios entre 0 e 1, e  $\epsilon$  é uma constante suficientemente pequena (!);
  - Muito usada em implementações computacionais, mas deve-se ter cuidado!
- Regras: lexicográfica e de Bland – garantem convergência (teórica) do método simplex.

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

- ▶ Um vetor  $u$  é lexicograficamente menor que um vetor  $v$  se  $u \neq v$  e o primeiro componente de  $u$  distinto de  $v$ , digamos  $u_i$ , satisfaz  $u_i < v_i$  (isto é: existe  $i$  tal que  $u_j = v_j$  para  $j = 0, \dots, i-1$  e  $u_i < v_i$ );

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

- ▶ Um vetor  $u$  é lexicograficamente menor que um vetor  $v$  se  $u \neq v$  e o primeiro componente de  $u$  distinto de  $v$ , digamos  $u_i$ , satisfaz  $u_i < v_i$  (isto é: existe  $i$  tal que  $u_j = v_j$  para  $j = 0, \dots, i-1$  e  $u_i < v_i$ );  
 $[0, 2, 1, 4] <_L [0, 2, 3, 0]$

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

- ▶ Um vetor  $u$  é lexicograficamente menor que um vetor  $v$  se  $u \neq v$  e o primeiro componente de  $u$  distinto de  $v$ , digamos  $u_i$ , satisfaz  $u_i < v_i$  (isto é: existe  $i$  tal que  $u_j = v_j$  para  $j = 0, \dots, i-1$  e  $u_i < v_i$ );  
 $[0, 2, 1, 4] <_L [0, 2, 3, 0]$
- ▶ A regra é baseada no *Tableau*: quando há empate no teste da razão, divide-se cada valor na linha  $i$  do *Tableau* por  $y_i$  (somente para  $y_i > 0$ ) e escolhe-se a linha que é lexicograficamente menor;

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

- ▶ Um vetor  $u$  é lexicograficamente menor que um vetor  $v$  se  $u \neq v$  e o primeiro componente de  $u$  distinto de  $v$ , digamos  $u_i$ , satisfaz  $u_i < v_i$  (isto é: existe  $i$  tal que  $u_j = v_j$  para  $j = 0, \dots, i-1$  e  $u_i < v_i$ );  
 $[0, 2, 1, 4] <_L [0, 2, 3, 0]$
- ▶ A regra é baseada no *Tableau*: quando há empate no teste da razão, divide-se cada valor na linha  $i$  do *Tableau* por  $y_i$  (somente para  $y_i > 0$ ) e escolhe-se a linha que é lexicograficamente menor;
- ▶ No simplex em notação matricial, isso seria equivalente a: Para cada  $j = 1, \dots, n$ , calcular  $B^{-1}a_j$  e dividir cada componente por  $y_i$  (somente se  $y_i > 0$ ). Se houver algum  $i$  tal que a componente do vetor resultante seja estritamente menor, então  $B_i$  sai da base;

# Degeneração

## ▷ Regra lexicográfica

- ▶ Um vetor  $u$  é lexicograficamente menor que um vetor  $v$  se  $u \neq v$  e o primeiro componente de  $u$  distinto de  $v$ , digamos  $u_i$ , satisfaz  $u_i < v_i$  (isto é: existe  $i$  tal que  $u_j = v_j$  para  $j = 0, \dots, i-1$  e  $u_i < v_i$ );  
 $[0, 2, 1, 4] <_L [0, 2, 3, 0]$
- ▶ A regra é baseada no *Tableau*: quando há empate no teste da razão, divide-se cada valor na linha  $i$  do Tableau por  $y_i$  (somente para  $y_i > 0$ ) e escolhe-se a linha que é lexicograficamente menor;
- ▶ No simplex em notação matricial, isso seria equivalente a: Para cada  $j = 1, \dots, n$ , calcular  $B^{-1}a_j$  e dividir cada componente por  $y_i$  (somente se  $y_i > 0$ ). Se houver algum  $i$  tal que a componente do vetor resultante seja estritamente menor, então  $B_i$  sai da base;
- ▶ Sempre há uma componente  $i$  satisfazendo o critério acima quando  $A$  tem linhas independentes (senão  $B^{-1}A$  teria duas linhas idênticas).

# Degeneração

## ▷ Regra de Bland

# Degeneração

## ▷ Regra de Bland

- ▶ No caso de empate no teste da razão, escolha para sair da base a componente de menor índice;
- ▶ Muito mais simples e não requer o uso do *Tableau* ou cálculos adicionais;

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  
 $Bx_{\mathcal{B}} = b;$

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  
 $Bx_{\mathcal{B}} = b;$
- ▶ A matriz básica é representada pela decomposição  $B = LU;$

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  
 $Bx_{\mathcal{B}} = b$ ;
- ▶ A matriz básica é representada pela decomposição  $B = LU$ ;
- ▶ Na prática, os problemas são de grande-porte e esparsos, e assim, utiliza-se estruturas de dados para representação de matrizes esparsas;

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  $Bx_{\mathcal{B}} = b$ ;
- ▶ A matriz básica é representada pela decomposição  $B = LU$ ;
- ▶ Na prática, os problemas são de grande-porte e esparsos, e assim, utiliza-se estruturas de dados para representação de matrizes esparsas;
- ▶ Problemas esparsos são aqueles com relativamente poucos coeficientes não-nulos;

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  $Bx_{\mathcal{B}} = b$ ;
- ▶ A matriz básica é representada pela decomposição  $B = LU$ ;
- ▶ Na prática, os problemas são de grande-porte e esparsos, e assim, utiliza-se estruturas de dados para representação de matrizes esparsas;
- ▶ Problemas esparsos são aqueles com relativamente poucos coeficientes não-nulos;
- ▶ Em média, problemas reais tem 5% dos coeficientes não-nulos;

# Implementações computacionais eficientes

- ▶ Cálculos baseados na notação matricial;
- ▶ Porém, **inversas não são usadas**: resolução de sistemas lineares, p.ex.  
 $Bx_B = b$ ;
- ▶ A matriz básica é representada pela decomposição  $B = LU$ ;
- ▶ Na prática, os problemas são de grande-porte e esparsos, e assim, utiliza-se estruturas de dados para representação de matrizes esparsas;
- ▶ Problemas esparsos são aqueles com relativamente poucos coeficientes não-nulos;
- ▶ Em média, problemas reais tem 5% dos coeficientes não-nulos;
- ▶ **Bibliografia:**  
Maros, István. *Computational techniques of the simplex method*. Vol. 61. Springer Science & Business Media, 2002.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?