



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 3.1: Condições de otimalidade e os métodos de programação linear

Apresentação

Objetivos desta semana:

- ▶ Estudar as Condições de Otimalidade;
- ▶ Entender como os métodos de programação linear se derivam a partir dessas condições;
- ▶ Iniciar os estudos sobre o Método Simplex.

Apresentação

Objetivos deste tópico:

- ▶ Estudar condições de otimalidade também conhecidas como condições KKT;
- ▶ Entender como os métodos de programação linear se derivam a partir dessas condições.

Vídeo-aula:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=v-B9HX2oTUA>

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

Dualidade

► Condições de otimalidade

Teorema: Folgas Complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

$$(i) \quad p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$(ii) \quad (c_j - p^T a_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- ▶ Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:
- *Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,*
 - (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, i = 1, \dots, m;$
 - (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, j = 1, \dots, n.$

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:
- *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A^T p \leq c$$

Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

- (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, i = 1, \dots, m;$
- (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, j = 1, \dots, n.$

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:
- *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$A^T p \leq c$$

Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se, $(c_j - p^T a_j)x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

Os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente, se e somente se, satisfazem

$$Ax = b$$

$$A^T p \leq c$$

$$(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x \geq 0$$

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Considere os problemas **primal e dual** na forma padrão;
(sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

Os vetores $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$ e $s \in \mathbb{R}^n$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente, se e somente se, satisfazem

$$Ax = b$$

$$A^T p + s = c$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x, s \geq 0$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$Ax = b$$

$$A^T p + s = c$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x, s \geq 0$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- ▶ Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$Ax = b$$

$$A^T p + s = c$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x, s \geq 0$$

- ▶ Em programação linear, temos que as condições KKT são necessárias e suficientes para otimalidade;

Dualidade

► Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$Ax = b$$

$$A^T p + s = c$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x, s \geq 0$$

- Em programação linear, temos que as condições KKT são necessárias e suficientes para otimalidade;
- Para problemas de otimização em geral, são condições necessárias apenas (e podem exigir algumas condições a mais).

Dualidade

▷ Condições KKT

"When Kuhn and Tucker proved the Kuhn-Tucker theorem in 1950 they launched the theory of non-linear programming. However, in a sense this theorem had been proven already: In 1939 by W. Karush in a master's thesis, which was unpublished; in 1948 by F. John in a paper that was at first rejected by the Duke Mathematical Journal; and possibly earlier by Ostrogradsky and Farkas."

Kjeldsen, T.H. *A Contextualized Historical Analysis of the Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: The Impact of World War II.*
Historia Mathematica 27(4), 331–361, 2000.

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$\begin{array}{ll}\min & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a} & h_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ & \vdots \\ & h_l(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ & g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0\end{array}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

com $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definimos a função Lagrangiana do problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, p, s) &= f(x) + p^T h(x) + s^T g(x) \\ \text{com } s^T &\geq 0. \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- ▶ Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1),

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- ▶ Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas.

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = 0$$

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, l\end{aligned}$$

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, l \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, l \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ s_j g_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, l \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ s_j g_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, m \\ s_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) =$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) =$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) =$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) =$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T(x)$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T(x)$$

$$\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) =$$

Dualidade

► Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T(x)$$

$$\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$$

Dualidade

► Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T(x)$$

$$\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$$

- Além disso, as condições de regularidade são sempre satisfeitas;

Dualidade

► Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

$$f(x) = c^T x;$$

$$h(x) = b - Ax;$$

$$g_j(x) = -x_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T(x)$$

$$\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$$

- Além disso, as condições de regularidade são sempre satisfeitas;
- Pela dualidade forte, as condições são também suficientes.

Dualidade

► Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f , g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, l \\ g_j(x) &\leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ s_j g_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, m \\ s_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;
- ▶ Que por sua vez é a base das condições KKT;

Dualidade

▷ Condições KKT

- ▶ Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;
- ▶ Que por sua vez é a base das condições KKT;
- ▶ Que por sua vez são a base dos métodos de solução em otimização.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

► Onde está a dificuldade?

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$).

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- **Métodos tipo simplex:** particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$,

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- **Métodos tipo simplex:** particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- **Métodos tipo simplex:** particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- **Métodos tipo simplex:** particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex: $x \geq 0$

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
 - Método dual simplex:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
 - Método dual simplex: $s \geq 0$

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \quad (2)$$

$$A^T p + s = c \quad (3)$$

$$s_j x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x, s \geq 0 \quad (5)$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0, \forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0, \forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
 - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
 - Método dual simplex: $s \geq 0$ (factibilidade dual, busca-se $x \geq 0$).

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- ▶ Métodos de pontos interiores:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- ▶ Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$. Além disso:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$. Além disso:

- Método primal-dual:

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$. Além disso:

- Método primal-dual: usa (6)–(8) para calcular as direções de busca.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$. Além disso:

- Método primal-dual: usa (6)–(8) para calcular as direções de busca. É chamado *factível* quando (6) e (7) devem ser satisfeitos em toda iteração.

Dualidade

► Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \quad j = 1, \dots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \rightarrow 0$. Além disso:

- Método primal-dual: usa (6)–(8) para calcular as direções de busca. É chamado *factível* quando (6) e (7) devem ser satisfeitos em toda iteração. Caso contrário, o método é chamado *infactível*.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?