



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 2.2: Introdução à Dualidade; Interpretação Econômica

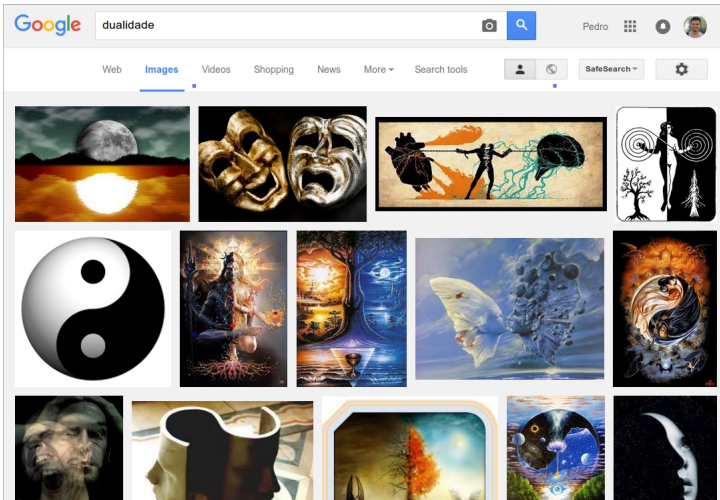
Apresentação

Objetivos deste tópico:

- ▶ Conhecer o conceito de dualidade e entender como ela se manifesta na programação linear;
- ▶ Aprender o que é o problema dual e como obtê-lo;
- ▶ Estudar a Interpretação Econômica em programação linear.

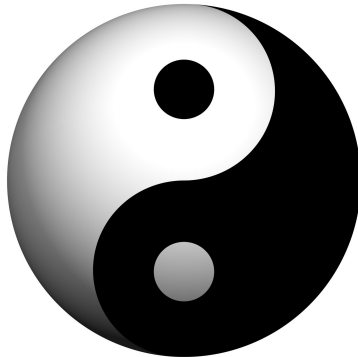
Vídeo-aulas:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=At245dRQXl8>
- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=HYK1lgOuMzA>



Dualidade

▷ Yin-yang



*Duas forças fundamentais opostas e complementares
que se encontram em todas as coisas.*

Dualidade

▷ Comédia e Tragédia



São as raízes do teatro! A princípio são completamente opostas, mas na verdade estão totalmente interligadas, nasceram juntas, e uma não existe sem a outra.

Dualidade

▷ Razão e emoção



Muitas vezes ficamos numa briga de sentimentos: razão fala uma coisa, mas o coração fala outra! São manifestações extremas, opostas, mas que são totalmente interligadas.

Dualidade

▷ Bem e mal



Extremos e totalmente interligados, assim como amor e ódio, noite e dia, entre muitos outros.

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3 \\ & 0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0\end{array}$$

$$x^* = (4,62; 2,3)$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$x^* = (4,62; 2,3)$$

$$\begin{array}{ll}\min & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3 \\ & 0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0\end{array}$$

$$p^* = (5,37; 0; 0,78)$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}x^* &= (4,62; 2,3) \\ f(x^*) &= 18,46\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}\min & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3 \\ & 0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}p^* &= (5,37; 0; 0,78) \\ g(p^*) &= 18,46\end{aligned}$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x^* = (4,62; 2,3)$$

$$f(x^*) = 18,46$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

$$p^* = (5,37; 0; 0,78)$$

$$g(p^*) = 18,46$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x^* = (4,62; 2,3)$$

$$f(x^*) = 18,46$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

$$p^* = (5,37; 0; 0,78)$$

$$g(p^*) = 18,46$$

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- ▶ Se um é min, o outro é max;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- ▶ Se um é min, o outro é max;
- ▶ O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- ▶ Se um é min, o outro é max;
- ▶ O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- ▶ O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- ▶ Se um é min, o outro é max;
- ▶ O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- ▶ O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;
- ▶ As variáveis de um estão relacionadas com as restrições do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- ▶ Se um é min, o outro é max;
- ▶ O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- ▶ O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;
- ▶ As variáveis de um estão relacionadas com as restrições do outro;
- ▶ As restrições de um estão relacionadas com as variáveis do outro.

Dualidade

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Dualidade

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \max$$

Dualidade

$$\min \quad f(x) = c^T x$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max \quad g(p) = b^T p$$

Dualidade

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & \leq c\end{array}$$

Dualidade

$$\min \quad f(x) = c^T x$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max \quad g(p) = b^T p$$

$$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$$

Dualidade

$$\min \quad f(x) = c^T x$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max \quad g(p) = b^T p$$

$$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$$

$$(p \text{ livre})$$

Dualidade

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

► $x_1, \dots, x_n$: variáveis primais;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

- ▶ $x_1, \dots, x_n$: variáveis primais;
- ▶ $p_1, \dots, p_m$: variáveis duais;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

- ▶ $x_1, \dots, x_n$: variáveis primais;
- ▶ $p_1, \dots, p_m$: variáveis duais;
- ▶ $Ax = b$: restrições primais;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

- ▶ $x_1, \dots, x_n$: variáveis primais;
- ▶ $p_1, \dots, p_m$: variáveis duais;
- ▶ $Ax = b$: restrições primais;
- ▶ $A^T p \leq c$: restrições duais.

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \max \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- ▶ O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & p \geq 0\end{array}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- ▶ O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & p \leq 0\end{array}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- ▶ O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \leq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \geq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- ▶ O dual do dual é o primal.

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\min & 15x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max	
Variável primal	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max		
Variável primal	Restrição dual	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max		
Variável primal	Restrição dual	
≥ 0		

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max		
Variável primal	Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	
livre	$\Rightarrow$	$=$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	
livre	$\Rightarrow$	$=$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$			
livre	$\Rightarrow$	$=$			

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$			

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

► Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Primal max $\Rightarrow$ Dual min					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≤ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≥ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll} \min & 15x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \quad \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\min \quad 15x_1 + 12x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow p_1$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 5 \quad \rightarrow p_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max \quad 3p_1 + 5p_2$$

$$\text{s.a} \quad p_1 + 2p_2 \leq 15$$

$$2p_1 - 4p_2 \leq 12$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\min \quad 15x_1 + 12x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow p_1$$

$$2x_1 - 4x_2 \leq 5 \quad \rightarrow p_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max \quad 3p_1 + 5p_2$$

$$\text{s.a} \quad p_1 + 2p_2 \leq 15$$

$$2p_1 - 4p_2 \leq 12$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}
 \min & 15x_1 + 12x_2 \\
 \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow p_1 \\
 & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \quad \rightarrow p_2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3p_1 + 5p_2 \\
 \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\
 & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
 \text{s.a} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3 \\
 & 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

Dualidade

Problema primal

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

Problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre})\end{array}$$

- ▶ Se um tem solução ótima, o outro também tem e **ambos** têm o **mesmo** valor ótimo;
- ▶ Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- ▶ Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- ▶ O dual do dual é o primal.

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}
 \min & 15x_1 + 12x_2 \\
 \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow p_1 \\
 & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \quad \rightarrow p_2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3p_1 + 5p_2 \\
 \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\
 & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
 \text{s.a} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3 \\
 & 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3p_1 + 5p_2 \\
 \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\
 & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\
 & -p_1 + 0p_2 \leq 0 \\
 & 0p_1 + p_2 \leq 0 \\
 & p_1, p_2 \text{ livres}
 \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Dualidade

► Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Primal max $\Rightarrow$ Dual min					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≤ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≥ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

$$\min \quad 10p_1 + 8p_2$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow p_1 \\
 & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow p_2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 10p_1 + 8p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + 2p_2 \leq 5 \\
 & 2p_1 - p_2 \leq 12 \\
 & p_1 + 3p_2 \leq 4 \\
 & p_1, p_2
 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & 10p_1 + 8p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \geq 5 \\ & 2p_1 - p_2 \geq 12 \\ & p_1 + 3p_2 \geq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \text{ livre}\end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\min & 10p_1 + 8p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \geq 5 \rightarrow x_1 \\ & 2p_1 - p_2 \geq 12 \rightarrow x_2 \\ & p_1 + 3p_2 \geq 4 \rightarrow x_3 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \text{ livre}\end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício

Determine o problema dual, desenhe sua região factível e encontre a solução ótima dual usando o método gráfico.

$$\begin{array}{ll}\min & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício

Determine o problema dual, desenhe sua região factível e encontre a solução ótima dual usando o método gráfico.

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad -2x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$\max \quad g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2$$

$$\text{s.a} \quad -2p_1 + 3p_2 \leq 2$$

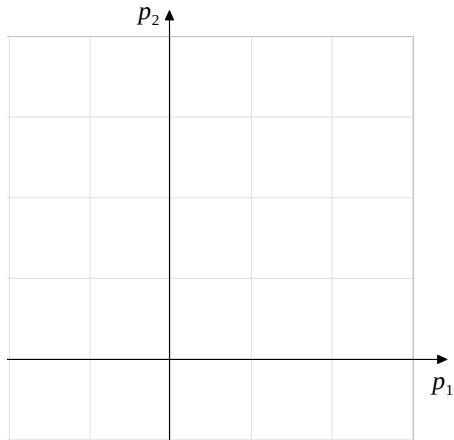
$$3p_1 + 2p_2 \leq 1$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.$$

Dualidade

▷ Exercício

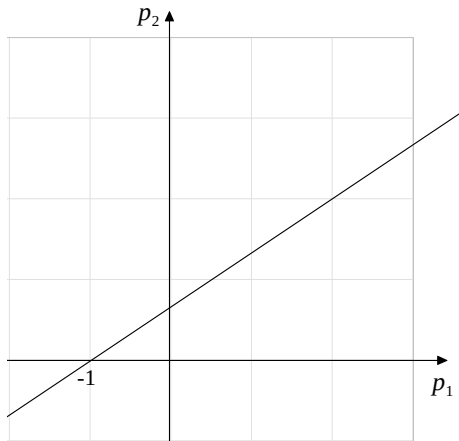
$$\begin{array}{ll}
 \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
 \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

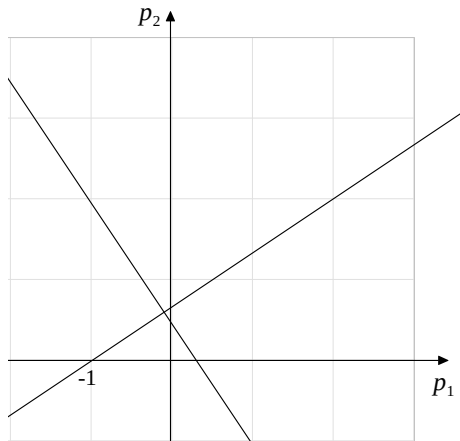
$$\begin{array}{ll}
 \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
 \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

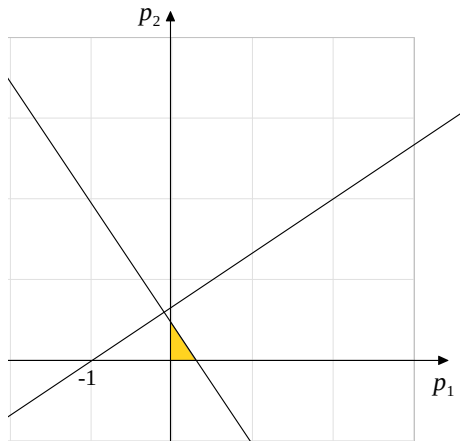
$$\begin{array}{ll} \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

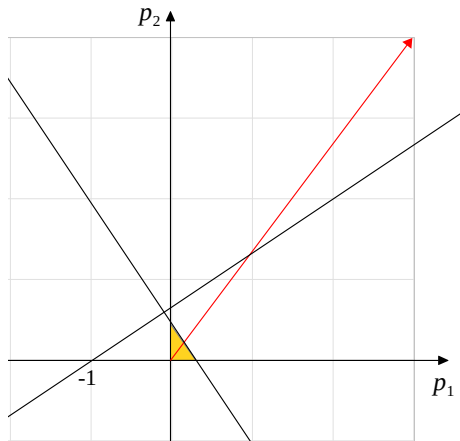
$$\begin{array}{ll} \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

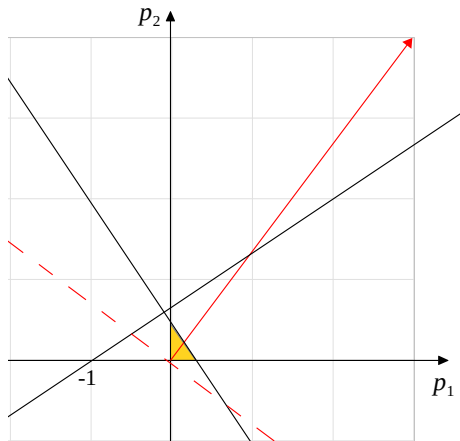
$$\begin{array}{ll}
 \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
 \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

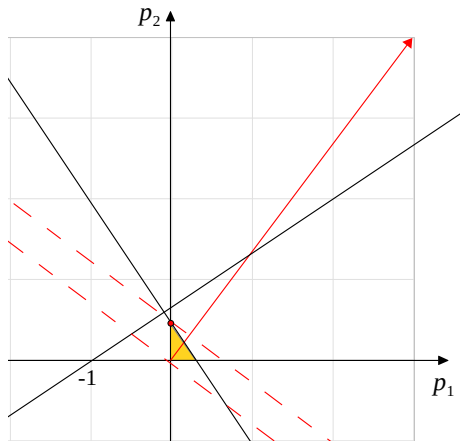
$$\begin{array}{ll}
 \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
 \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

$$\begin{array}{ll}
 \max & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
 \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{array}$$



Dualidade

▷ Exercício

$$\max \quad g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2$$

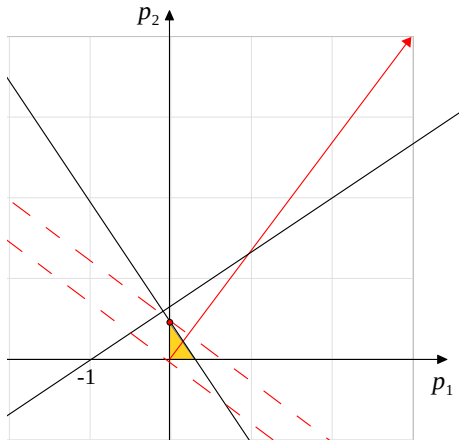
$$\text{s.a} \quad -2p_1 + 3p_2 \leq 2$$

$$3p_1 + 2p_2 \leq 1$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.$$

$$p^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$g(p^*) = 6$$



Dualidade

▷ Interpretação econômica

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

Dualidade

▷ Interpretação econômica

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de Cobre, Zinco e Chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

Outra fábrica, do mesmo segmento, está interessada em comprar todo o estoque de Cobre, Zinco e Chumbo da empresa. Há o interesse da empresa no negócio, desde que a receita obtida com a venda do material seja pelo menos igual à receita que seria obtida com a venda das ligas. Para garantir o negócio, a outra fábrica deseja oferecer um preço justo, mas que seja o menor possível. Qual deve ser a proposta de preços?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra, preço dual*)

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra, preço dual*)
- ▶ Receita total com a venda do material:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- ▶ Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o preço de oportunidade (preço sombra, preço dual)
- ▶ Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o preço de oportunidade (preço sombra, preço dual)
- ▶ Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o preço de oportunidade (preço sombra, preço dual)
- ▶ Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 2:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- ▶ p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
 p_i é o preço de oportunidade (preço sombra, preço dual)
- ▶ Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3$.
- ▶ Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 2: $0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$;
- ▶ Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$;
- ▶ Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$;
- ▶ Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$;
- ▶ Como determinar os preços p_i tal que a receita obtida com a venda dos materiais seja pelo menos igual à receita obtida com a venda das ligas (produto final)?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- ▶ Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$;
- ▶ Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$;
- ▶ Como determinar os preços p_i tal que a receita obtida com a venda dos materiais seja pelo menos igual à receita obtida com a venda das ligas (produto final)? $\min 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Logo, para determinar o preço a ser proposto, de modo que as fábricas fiquem satisfeitas com o negócio, resolvemos o modelo:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3 \\ & 0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Temos um par primal-dual!

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Temos um par primal-dual!

$$x^* \approx (4,62; 2,3)$$

$$p^* \approx (5,37; 0; 0,78)$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,5p_1 + 0,1p_2 + 0,4p_3 \geq 3$$

$$0,3p_1 + 0,2p_2 + 0,5p_3 \geq 2$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

Temos um par primal-dual!

$$x^* \approx (4,62; 2,3)$$

$$f(x^*) \approx 18,46$$

$$p^* \approx (5,37; 0; 0,78)$$

$$g(p^*) \approx 18,46$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;
- ▶ Essa interpretação econômica da dualidade mostra que a melhor decisão (solução) para o problema primal está relacionada com a melhor decisão (solução) para o problema dual;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- ▶ Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;
- ▶ Essa interpretação econômica da dualidade mostra que a melhor decisão (solução) para o problema primal está relacionada com a melhor decisão (solução) para o problema dual;
- ▶ Assim, uma solução factível só pode ser ótima para o problema primal, se a solução dual correspondente também for ótima para o problema dual.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?