



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 13.4: Exemplo de aplicação da Decomposição de Dantzig-Wolfe:
Problema de Roteamento de Veículos

Apresentação - Tópico 13.4

Objetivos deste tópico:

- Compreender como aplicar a decomposição de Dantzig-Wolfe no Problema de Roteamento de Veículos, que é outro caso clássico da literatura.

Problemas de roteamento de veículos

Problemas de roteamento de veículos



Problemas de roteamento de veículos



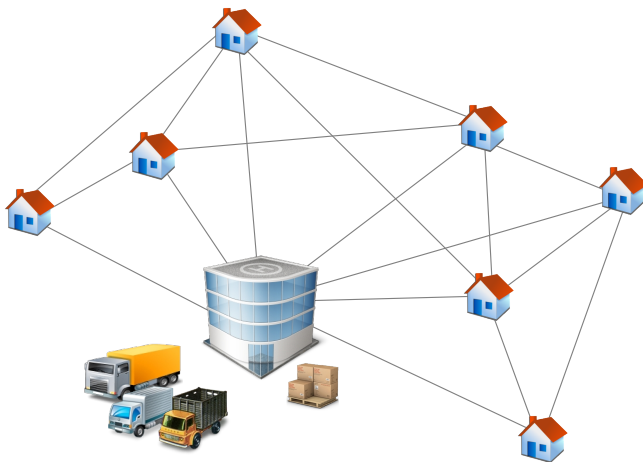
Problemas de roteamento de veículos



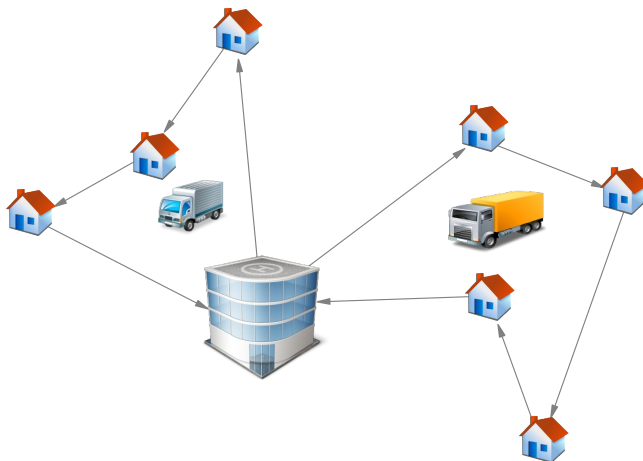
Problemas de roteamento de veículos



Problemas de roteamento de veículos



Problemas de roteamento de veículos



Problemas de roteamento de veículos

Envolvem o projeto de rotas de custo mínimo para atender às demandas de clientes, partindo de um ou mais depósitos.

Problemas de roteamento de veículos

Envolvem o projeto de rotas de custo mínimo para atender às demandas de clientes, partindo de um ou mais depósitos.

- ▶ As visitas podem corresponder à entrega e/ou coleta de produtos, prestação de serviços, entre outros.

Problemas de roteamento de veículos

Envolvem o projeto de rotas de custo mínimo para atender às demandas de clientes, partindo de um ou mais depósitos.

- ▶ As visitas podem corresponder à entrega e/ou coleta de produtos, prestação de serviços, entre outros.
- ▶ Podem estar sujeitos a requisitos adicionais, como capacidade do veículos, frota heterogênea, janelas de tempo, tempo de serviço, turno dos funcionários, ...

Problemas de roteamento de veículos

Envolvem o projeto de rotas de custo mínimo para atender às demandas de clientes, partindo de um ou mais depósitos.

- ▶ As visitas podem corresponder à entrega e/ou coleta de produtos, prestação de serviços, entre outros.
- ▶ Podem estar sujeitos a requisitos adicionais, como capacidade do veículos, frota heterogênea, janelas de tempo, tempo de serviço, turno dos funcionários, ...
- ▶ Fundamental nas áreas de transportes, gerenciamento da distribuição e logística.

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Problema de roteamento de veículos

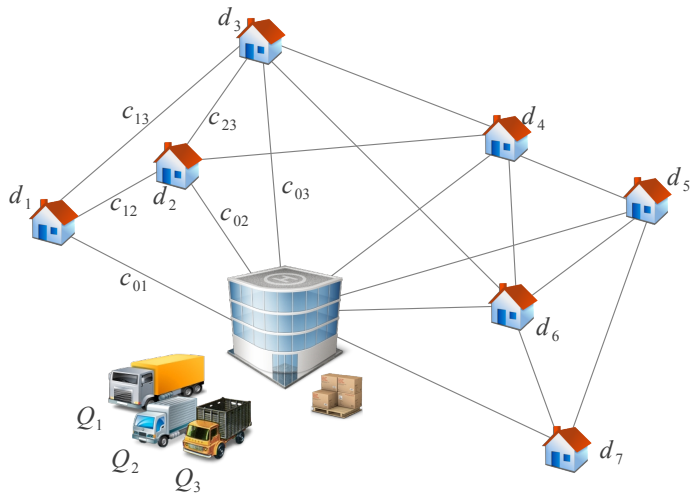
▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Parâmetros:

- ▶ n clientes;
- ▶ K veículos em um depósito (frota heterogênea);
- ▶ Q_k : capacidade máxima do veículo k , $k = 1, \dots, K$;
- ▶ d_i : demanda do cliente i , $i = 1, \dots, n$;
- ▶ c_{ij} : custo de ir do cliente i para o j imediat., $i, j = 1, \dots, n$;
- ▶ Assume-se que $d_i \leq Q_k$, para todo i e k ;
- ▶ Os veículos devem partir do depósito e retornar a ele.

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

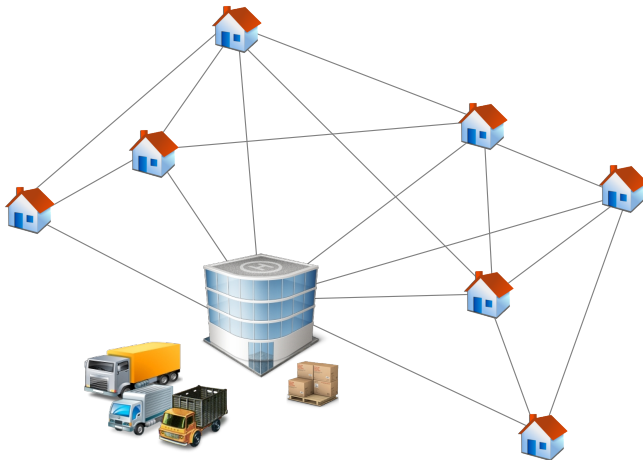
▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Representação:

- ▶ Os clientes são representados pelos nós 1 a n de um grafo;
- ▶ O depósito é representado no grafo pelos nós 0 e $n + 1$;
- ▶ Nó 0: “depósito de saída”;
- ▶ Nó $n + 1$: “depósito de chegada”.

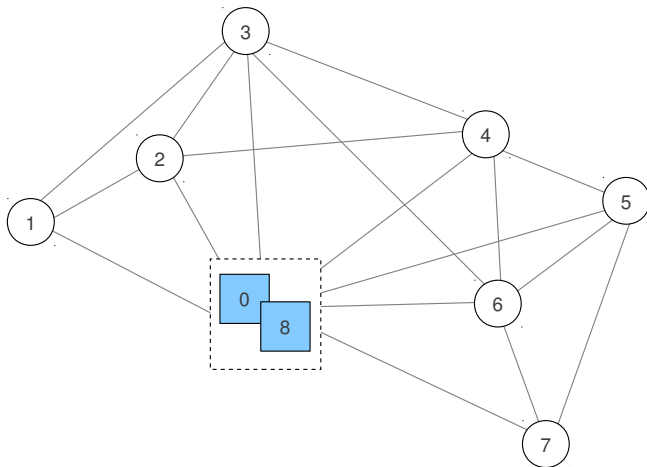
Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Objetivo:

- ▶ Determinar o conjunto de rotas viáveis para atender a demanda de todos os clientes e minimizar o custo total de transporte.

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Objetivo:

- ▶ Determinar o conjunto de rotas viáveis para atender a demanda de todos os clientes e minimizar o custo total de transporte.

Variáveis de decisão:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Objetivo:

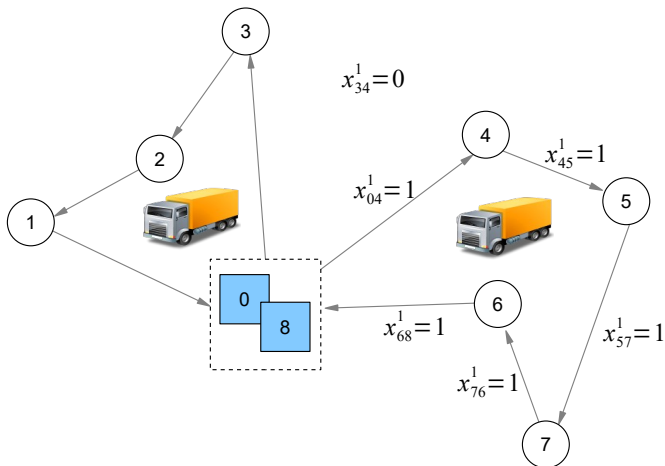
- ▶ Determinar o conjunto de rotas viáveis para atender a demanda de todos os clientes e minimizar o custo total de transporte.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{veículo } k \text{ visita o nó } i \text{ e vai para o nó } j \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
$$i, j = 0, \dots, n+1; \quad k = 1, \dots, K.$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Objetivo:

- ▶ Determinar o conjunto de rotas viáveis para atender a demanda de todos os clientes e minimizar o custo total de transporte.

Função objetivo:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Objetivo:

- ▶ Determinar o conjunto de rotas viáveis para atender a demanda de todos os clientes e minimizar o custo total de transporte.

Função objetivo:

- ▶ Minimizar o custo total:
$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Restrições:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Restrições:

- ▶ Cada cliente deve ser visitado uma única vez:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Restrições:

- ▶ Cada cliente deve ser visitado uma única vez:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Restrições:

- ▶ Cada cliente deve ser visitado uma única vez:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

- ▶ O mesmo veículo deve visitar antecessor/sucessor:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Restrições:

- ▶ Cada cliente deve ser visitado uma única vez:

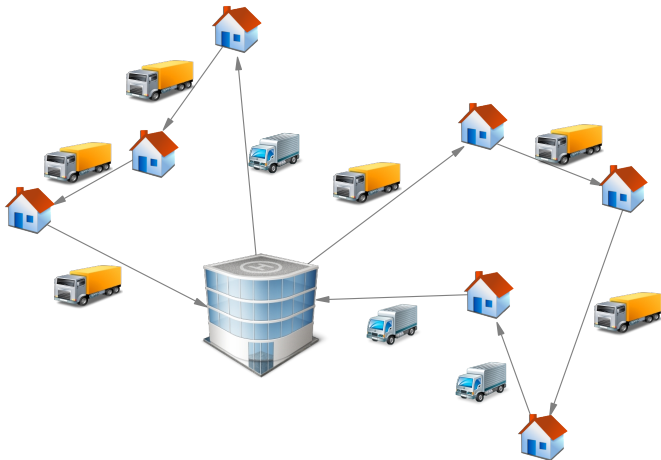
$$\sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

- ▶ O mesmo veículo deve visitar antecessor/sucessor:

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

- ▶ Capacidade máxima do veículo:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

► Capacidade máxima do veículo:

$$\sum_{i=1}^n d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k \leq Q_k, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

- ▶ Cada veículo deve sair do depósito:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

- ▶ Cada veículo deve sair do depósito:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

- ▶ Cada veículo deve sair do depósito:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K;$$

- ▶ Cada veículo deve retornar ao depósito:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

- ▶ Cada veículo deve sair do depósito:

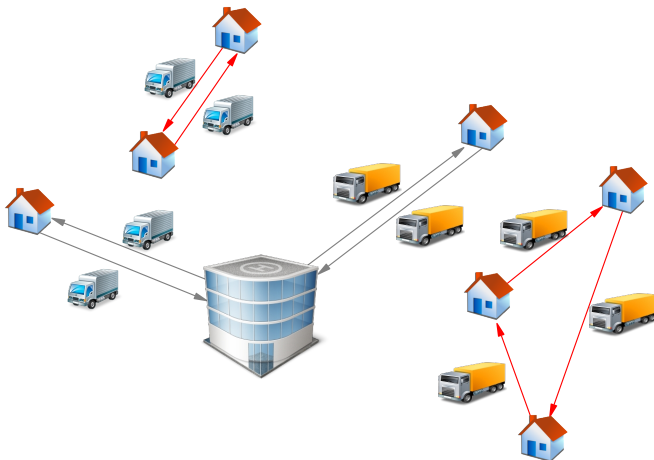
$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K;$$

- ▶ Cada veículo deve retornar ao depósito:

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

▶ Evitar sub-rota:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

► Evitar sub-rota:

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{1, \dots, n\}, \quad 1 < |S| < n, \quad k = 1, \dots, K.$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{i=1}^n d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k \leq Q_k, \quad k = 1, \dots, K,
 \end{aligned}$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{1, \dots, n\}, \quad 1 < |S| < n, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k &= 1, & k &= 1, \dots, K, \\ \sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k &= 1, & k &= 1, \dots, K, \\ \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k &\leq |S| - 1, & \forall S \subset \{1, \dots, n\}, \ 1 < |S| < n, \ k &= 1, \dots, K, \\ x_{ij}^k &\in \{0, 1\}, & i, j &= 0, \dots, n+1, \ k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

► Observação: Possui número de restrições que é **exponencial** em n .

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$$u_i^k$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$u_i^k \rightarrow$ demanda total atendida pelo veículo k até o nó i .

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$u_i^k \rightarrow$ demanda total atendida pelo veículo k até o nó i .

Restrições para evitar sub-rota:

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$u_i^k \rightarrow$ demanda total atendida pelo veículo k até o nó i .

Restrições para evitar sub-rota:

$$u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ i \neq j, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$u_i^k \rightarrow$ demanda total atendida pelo veículo k até o nó i .

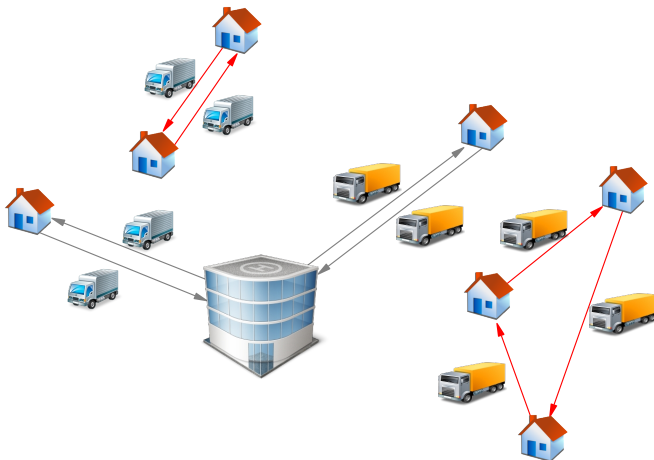
Restrições para evitar sub-rota:

$$u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ i \neq j, \quad k = 1, \dots, K;$$

$$0 \leq u_i^k \leq Q_k, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K,$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa



Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

- ▶ Possui um número polinomial de restrições;
- ▶ Variável adicional:

$u_i^k \rightarrow$ demanda total atendida pelo veículo k até o nó i .

Restrições para evitar sub-rota:

$$u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ i \neq j, \quad k = 1, \dots, K;$$

$$0 \leq u_i^k \leq Q_k, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K,$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Modelo anterior:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{i=1}^n d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k \leq Q_k, \quad k = 1, \dots, K,
 \end{aligned}$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Modelo anterior:

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K,$$

~~$$\sum_{i=1}^n d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k \leq Q_k, \quad k = 1, \dots, K,$$~~

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Modelo anterior:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{1, \dots, n\}, \quad 1 < |S| < n, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC)

Modelo anterior:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

~~$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset \{1, \dots, n\}, \quad 1 < |S| < n, \quad k = 1, \dots, K,$$~~

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

$$\min \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k (x_{ij}^k - 1), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ k = 1, \dots, K,$$

Problema de roteamento de veículos

▷ com restrição de capacidade (PRVC) - formulação alternativa

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$0 \leq u_i^k \leq Q_k, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$u_0^k = 0, \quad k = 1, \dots, K.$$

PRVC: Modelo compacto

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, & i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, & h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), & i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & 0 \leq u_i^k \leq Q_k, & i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_0^k = 0, & k = 1, \dots, K, \\
 & x_{ij}^k \in \{0, 1\}, & i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

PRVC: Modelo compacto

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, & i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, & h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k (x_{ij}^k - 1), & i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & 0 \leq u_i^k \leq Q_k, & i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_0^k = 0, & k = 1, \dots, K, \\
 & x_{ij}^k \in \{0, 1\}, & i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

PRVC: Modelo compacto

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, & i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, & h = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), & i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & 0 \leq u_i^k \leq Q_k, & i = 1, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & u_0^k = 0, & k = 1, \dots, K, \\
 & x_{ij}^k \in \{0, 1\}, & i, j = 0, \dots, n+1, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

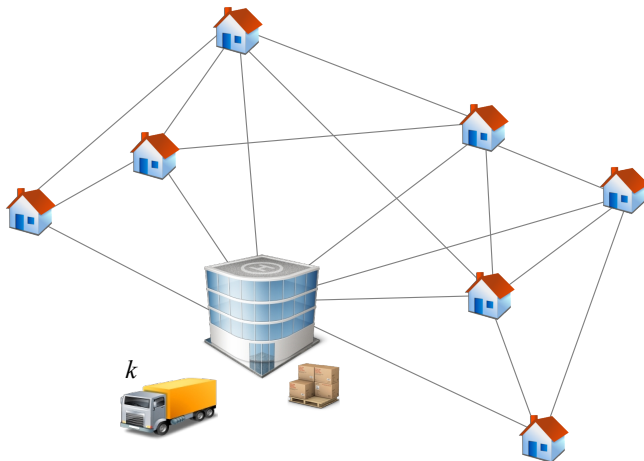
PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

Para cada $k = 1, \dots, K$:

$$\mathcal{X}^k = \left\{ x^k \mid \begin{array}{l} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^n x_{ih}^k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^{n+1} x_{hj}^k, \quad h = 1, \dots, n, \\ u_j^k \geq u_i^k + d_j x_{ij}^k + Q_k(x_{ij}^k - 1), \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{0j}^k = 1, \\ \sum_{i=0}^n x_{i,n+1}^k = 1, \\ 0 \leq u_i^k \leq Q_k, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ u_0^k = 0, \\ x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, n+1. \end{array} \right\}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema de caminho mínimo elementar com restrições de recurso



PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} x_{ij}^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_{ij}^k = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & x^k \in \mathcal{X}^k \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Discretização

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Discretização

- ▶ Reescrevendo x^k usando todos os pontos inteiros $\bar{x}_p^k$ de $\mathcal{X}^k$:

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Discretização

- ▶ Reescrevendo x^k usando todos os pontos inteiros $\bar{x}_p^k$ de $\mathcal{X}^k$:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{p \in P_k} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} \bar{x}_{p_{ij}}^k \lambda_p^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{p \in P_k} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_{p_{ij}}^k \lambda_p^k = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{p \in P_k} \lambda_p^k = 1, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \lambda_p^k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, K, \quad p \in P_k.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Discretização

- ▶ Assumindo que os veículos sejam idênticos ($\mathcal{X}^1 = \dots = \mathcal{X}^K$) e haja um número suficiente deles, obtemos o Problema Mestre Agregado:

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Discretização

- Assumindo que os veículos sejam idênticos ($\mathcal{X}^1 = \dots = \mathcal{X}^K$) e haja um número suficiente deles, obtemos o Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} \bar{x}_{pij} \lambda_p \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{p \in P} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_{pij} \lambda_p = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_p \in \{0, 1\}, \quad p \in P.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Relaxação linear

- ▶ Assumindo que os veículos sejam idênticos ($\mathcal{X}^1 = \dots = \mathcal{X}^K$) e haja um número suficiente deles, obtemos o Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} \bar{x}_{pij} \lambda_p \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{p \in P} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_{pij} \lambda_p = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_p \geq 0, \quad p \in P.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Relaxação linear

- Assumindo que os veículos sejam idênticos ($\mathcal{X}^1 = \dots = \mathcal{X}^K$) e haja um número suficiente deles, obtemos o Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} \bar{x}_{pij} \lambda_p \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{p \in P} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_{pij} \lambda_p = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\bar{u}_i) \\
 & \lambda_p \geq 0, \quad p \in P.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ O subproblema é dado por:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (c_{ij} - \bar{u}_i) x_{ij} \\ \text{s.a} & x \in \bar{\mathcal{X}}. \end{array}$$

com $\bar{u}_0 = \bar{u}_{n+1} = 0$.

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ O subproblema é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (c_{ij} - \bar{u}_i) x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & x \in \bar{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

com $\bar{u}_0 = \bar{u}_{n+1} = 0$.

- ▶ *Problema de caminho mínimo elementar com restrições de recurso;*

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ O subproblema é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (c_{ij} - \bar{u}_i) x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & x \in \bar{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

com $\bar{u}_0 = \bar{u}_{n+1} = 0$.

- ▶ *Problema de caminho mínimo elementar com restrições de recurso;*
- ▶ Recursos: capacidade dos veículos, janelas de tempo, etc.;

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ O subproblema é dado por:

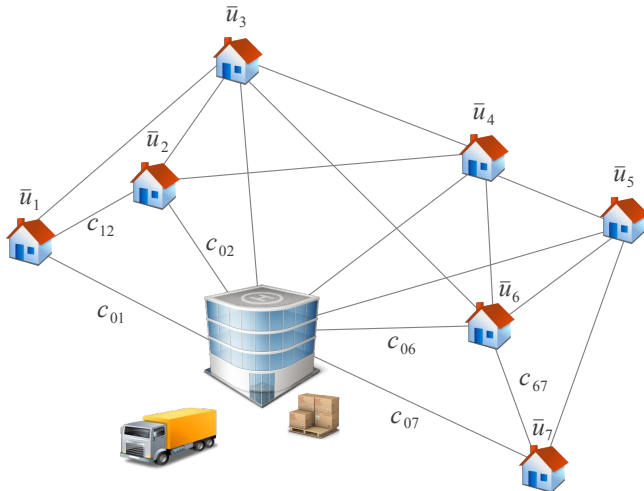
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} (c_{ij} - \bar{u}_i) x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & x \in \bar{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

com $\bar{u}_0 = \bar{u}_{n+1} = 0$.

- ▶ *Problema de caminho mínimo elementar com restrições de recurso;*
- ▶ Recursos: capacidade dos veículos, janelas de tempo, etc.;
- ▶ Em geral, é resolvido por programação dinâmica (*labeling*) com o auxílio de heurísticas e meta-heurísticas.

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problema de caminho mínimo elementar com restrições de recurso



PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- Conhecido na literatura como formulação por Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning formulation*):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p \in P} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} c_{ij} \bar{x}_{pij} \lambda_p \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{p \in P} \sum_{j=1}^{n+1} \bar{x}_{pij} \lambda_p = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_p \in \{0, 1\}, \quad p \in P.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- Conhecido na literatura como formulação por Particionamento de Conjuntos (*Set Partitioning formulation*):

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{p \in P} c_p \lambda_p \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{p \in P} a_{pi} \lambda_p = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \lambda_p \in \{0, 1\}, \quad p \in P.
 \end{aligned}$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ P é o conjunto de todas as rotas factíveis;

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

- ▶ P é o conjunto de todas as rotas factíveis;
- ▶ O custo c_p é dado pelo custo total da rota p ;

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problema Mestre

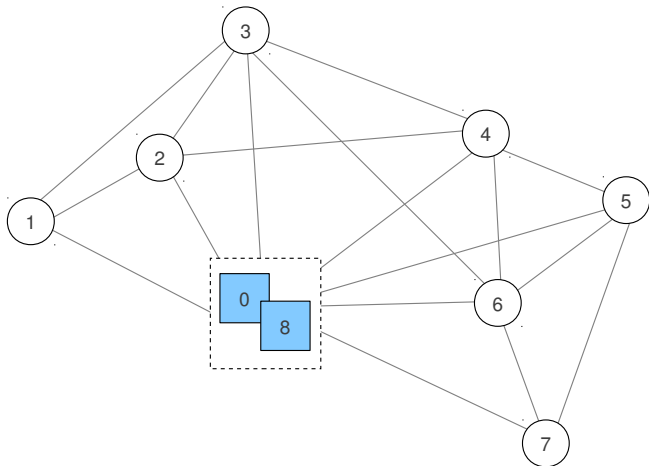
- ▶ P é o conjunto de todas as rotas factíveis;
- ▶ O custo c_p é dado pelo custo total da rota p ;
- ▶ Cada coluna é um vetor binário indicando quais clientes são visitados pela rota:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{cliente 1 não é visitado} \\ \rightarrow \text{cliente 2 é visitado} \\ \rightarrow \text{cliente 3 é visitado} \\ \vdots \\ \rightarrow \text{cliente } n \text{ não é visitado} \end{array}$$

$$D \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow D$$

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

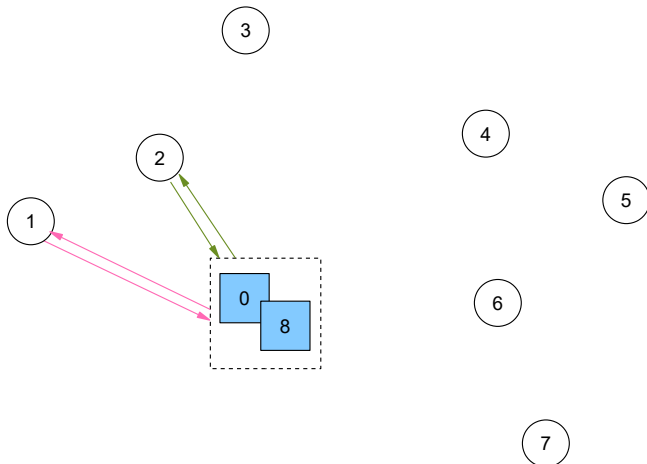
► Exemplo



[illegible]

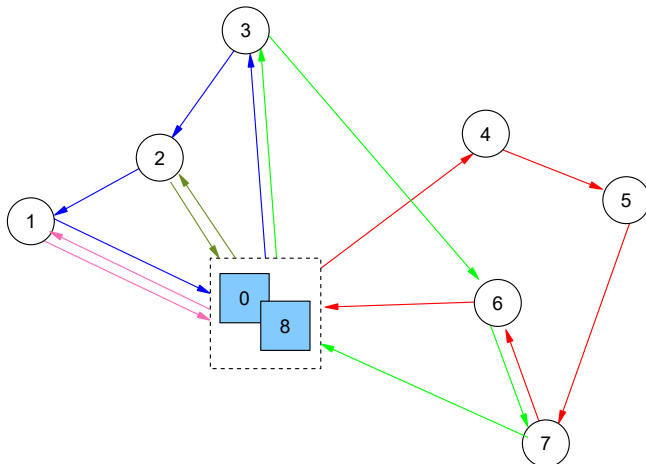
PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Exemplo: Algumas rotas



PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Exemplo: Algumas rotas



▷ Exemplo: Algumas rotas

[illegible]

PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Exemplo: Problema mestre inicial

$$\min \quad 32x_1 + 27x_2 + 80x_3 + 94x_4 + 86x_5 + \dots$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \dots = 1,$$

$$0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + \dots = 1,$$

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + \dots = 1,$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \dots = 1,$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + \dots = 1,$$

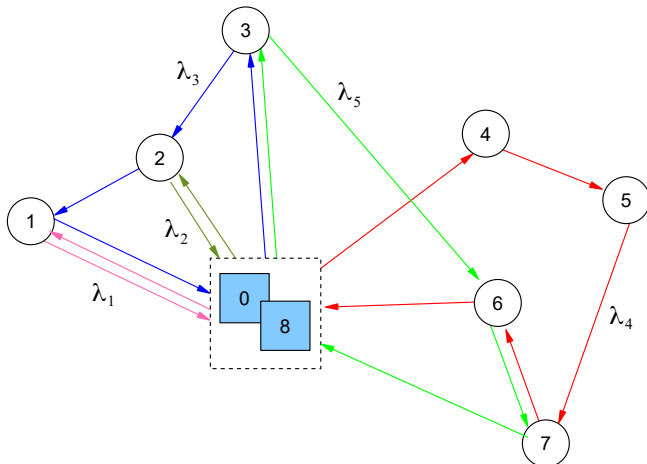
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + \dots = 1,$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + \dots = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \in \mathbb{Z}_+.$$

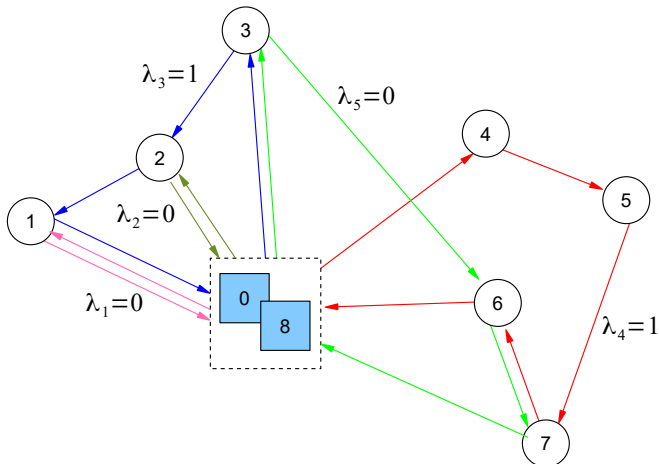
PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Exemplo: Variáveis associadas às rotas



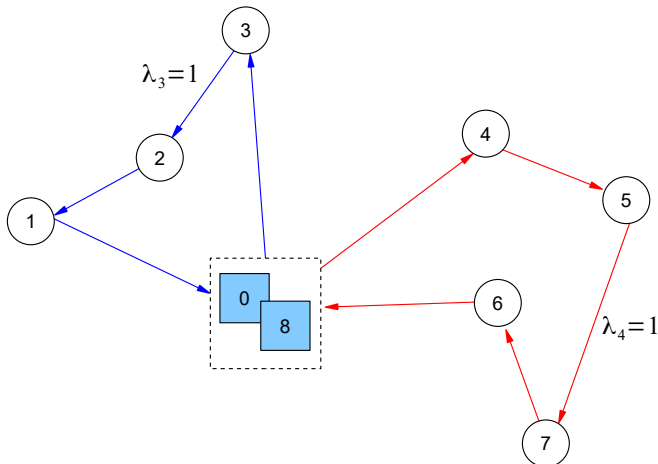
PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Exemplo: Solução factível



PRVC: Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Exemplo: Solução factível



Problema de roteamento de veículos

▷ Balinski e Quandt, *Operations Research* 12, 1964

ON AN INTEGER PROGRAM FOR A DELIVERY PROBLEM*

M. L. Balinski and R. E. Quandt

Princeton University, Princeton, New Jersey

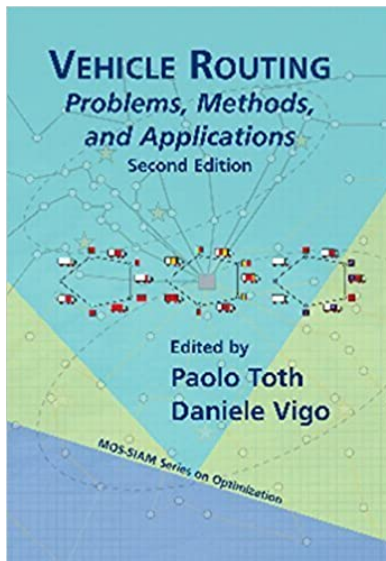
(Received March 11, 1963)

An actual truck delivery problem of general applicability is stated as an integer program. The successful computational performance of Gomory's 'cutting plane' algorithm for a set of nine particular problems is discussed. Finally, the structure of the general problem is shown to be a natural generalization of covering problems of graph theory.

THE PURPOSE of this note is to report on an integer programming approach to a truck delivery problem. It appears to be important to outline this approach because (1) the formulation is simple and has wide applicability, (2) the integer programming computations were remarkably successful, and (3) the nature of the formulation can be viewed as a generalization of a well-known problem of graph theory, called the covering problem.

Problema de roteamento de veículos

▷ Toth e Vigo, 2014



Problema de roteamento de veículos

▷ Pecin et al., Math. Progr. Computation 9, 2017

Math. Prog. Comp.
DOI 10.1007/s12532-016-0108-8



FULL LENGTH PAPER

Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing

Diego Pecin¹ · Artur Pessoa² ·
Marcus Poggi¹ · Eduardo Uchoa²

Received: 17 September 2015 / Accepted: 22 April 2016
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg and The Mathematical Programming Society 2016

Abstract The best performing exact algorithms for the capacitated vehicle routing problem developed in the last 10 years are based in the combination of cut and column generation. Some authors only used cuts expressed over the variables of the original formulation, in order to keep the pricing subproblem relatively easy. Other authors could reduce the duality gaps by also using a restricted number of cuts over the master LP variables, stopping when the pricing becomes prohibitively hard. A particularly effective family of such cuts are the submodular cuts. This work introduces a technique

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?