



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 13.2: Decomposição de Dantzig-Wolfe: Agregação de subproblemas

Apresentação - Tópico 13.2

Objetivos deste tópico:

- ▶ Entender como realizar a agregação de subproblemas e conhecer suas vantagens e consequências, principalmente quando esses subproblemas são idênticos.

Vídeo-aula:

- ▶ <https://youtu.be/9Mb6RuLjt2k>

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x, \\ \text{s.a} & Ax = b, \\ & x \in \mathcal{X}\end{array}$$

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Dx = d, x \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\ & x^k \in \mathcal{X}^k, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \left[\begin{array}{cccc} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{array} \right] \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\
 \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\
 & x^k \in \mathcal{C}^k = \text{conv}(\mathcal{X}^k), \quad k = 1, \dots, K, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{X}^1 : \\
 \mathcal{X}^2 : \\
 \vdots \\
 \mathcal{X}^K :
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 D^1 & & & \\
 & D^2 & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & D^K
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x^1 \\
 x^2 \\
 \vdots \\
 x^K
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 d^1 \\
 d^2 \\
 \vdots \\
 d^K
 \end{bmatrix}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

Problema Mestre Desagregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{q \in Q^k} c_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in R^k} c_r^k \mu_r^k \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^K \sum_{q \in Q^k} a_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^K \sum_{r \in R^k} a_r^k \mu_r^k = b, \\
 & \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k = 1, & k = 1, \dots, K, \\
 & \lambda_q^k \geq 0, \mu_r^k \geq 0, & k = 1, \dots, K, \forall q \in Q^k, \forall r \in R^k. \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, & k = 1, \dots, K, \\
 & x^k = \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R^k} \mu_r^k \bar{x}_r^k, & k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\ & x^k \in \mathcal{X}^k, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\ & x \in \mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \times \mathcal{X}^2 \times \dots \times \mathcal{X}^K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^2 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K : \end{array} \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\ & x \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^2 \times \dots \times \mathcal{C}^K, \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \left[\begin{array}{cccc} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{array} \right] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\min \quad \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\ \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1,
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & x^k = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r^k, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \hat{c}_q \lambda_q + \sum_{r \in R} \hat{c}_r \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \hat{a}_q \lambda_q + \sum_{r \in R} \hat{a}_r \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x \in \mathbb{Z}_+^n, \\
 & x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,
 \end{aligned}$$

$$\hat{c}_q = \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right); \quad \hat{a}_q = \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right); \quad \hat{c}_r = \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right); \quad \hat{a}_r = \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right)$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\ & x^k \in \mathcal{X}^k, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \left[\begin{array}{cccc} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{array} \right] \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^1 x^2 + \dots + c^1 x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^1 x^2 + \dots + A^1 x^K = b, \\ & x^k \in \mathcal{X}^k, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^1 x^k = d^1, x^k \geq 0\}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{X}^2 : & \\ \vdots & \\ \mathcal{X}^K : & \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^1 x^1 + c^1 x^2 + \dots + c^1 x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^1 x^2 + \dots + A^1 x^K = b, \\ & x^k \in \mathcal{X}^1, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^1 = \{x^1 \in \mathbb{Z}^{n_1} \mid D^1 x^1 = d^1, x^1 \geq 0\}, b \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 : & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^k \lambda_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^k \mu_r, \quad k = 1, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\min \quad \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K c^1 \bar{x}_q^1 \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K c^1 \bar{x}_r^1 \right) \mu_r$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^K A^1 \bar{x}_q^1 \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^K A^1 \bar{x}_r^1 \right) \mu_r = b,$$

$$\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1,$$

$$\lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0,$$

$$x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k},$$

$$x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^1 \lambda_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^1 \mu_r,$$

$$q \in Q, r \in R,$$

$$k = 1, \dots, K,$$

$$k = 1, \dots, K.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} (Kc^1 \bar{x}_q^1) \lambda_q + \sum_{r \in R} (Kc^1 \bar{x}_r^1) \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} (KA^1 \bar{x}_q^1) \lambda_q + \sum_{r \in R} (KA^1 \bar{x}_r^1) \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{k=1}^K x^k = \sum_{q \in Q} K \bar{x}_q^1 \lambda_q + \sum_{r \in R} K \bar{x}_r^1 \mu_r.
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} (c^1 \bar{x}_q^1) K \lambda_q + \sum_{r \in R} (c^1 \bar{x}_r^1) K \mu_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} (A^1 \bar{x}_q^1) K \lambda_q + \sum_{r \in R} (A^1 \bar{x}_r^1) K \mu_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
 & \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{k=1}^K x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^1 K \lambda_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^1 K \mu_r.
 \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

► Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{q \in Q} (c^1 \bar{x}_q^1) \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} (c^1 \bar{x}_r^1) \hat{\mu}_r \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} (A^1 \bar{x}_q^1) \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} (A^1 \bar{x}_r^1) \hat{\mu}_r = b, \\
 & \sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q = K, \\
 & \hat{\lambda}_q \geq 0, \hat{\mu}_r \geq 0, \quad q \in Q, r \in R, \\
 & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & \sum_{k=1}^K x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^1 \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^1 \hat{\mu}_r.
 \end{aligned}$$

► com $\hat{\lambda}_q = K\lambda_q$; $\hat{\mu}_r = K\mu_r$.

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$.

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM.

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- ▶ Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas.

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- ▶ Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração.

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- ▶ Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração. Entretanto, pode dificultar a solução do problema, já que várias colunas são agregadas em uma única;

Algumas observações...

- ▶ Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- ▶ Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- ▶ Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração. Entretanto, pode dificultar a solução do problema, já que várias colunas são agregadas em uma única;
- ▶ A agregação de blocos idênticos pode dificultar a ramificação.

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?