



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 11.1: Técnicas de Decomposição; Relaxação Lagrangiana; Teorema da Representação

Apresentação

Objetivos desta semana:

- ▶ Conhecer as técnicas de decomposição, suas aplicações e relevância;
- ▶ Conhecer os conceitos básicos de uma dessas técnicas, a Relaxação Lagrangiana, e ver como aplicá-la a problemas de otimização;
- ▶ Compreender o método de plano de cortes e o método subgradiente para resolver o problema dual Lagrangiano;
- ▶ Ver como aplicar a Relaxação Lagrangiana em problemas de otimização linear discreta, seus benefícios e suas particularidades.

Apresentação - Tópico 11.1

Objetivos deste tópico:

- ▶ Entender a importância da Relaxação Lagrangiana e suas aplicações;
- ▶ Conhecer os conceitos básicos de Relaxação Lagrangiana e como aplicá-la a problemas de otimização;
- ▶ Compreender e praticar o método de plano de cortes para resolver o problema dual Lagrangiano.

Vídeo-aulas:

- ▶ <https://youtu.be/bPkEARps1Dw>
- ▶ <https://youtu.be/sS5n4xRQ-vs>
- ▶ <https://youtu.be/Ze04CD3U8zU>

Problemas de grande-porte

- ▶ Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;

Problemas de grande-porte

- ▶ Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- ▶ Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;

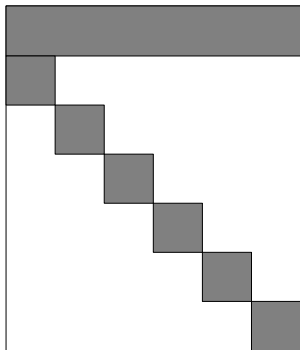
Problemas de grande-porte

- ▶ Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- ▶ Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;
- ▶ Entretanto, algumas aplicações podem resultar em modelos extremamente complicados para os softwares atuais, podendo levar horas, dias, meses, ... para se obter uma solução ótima;

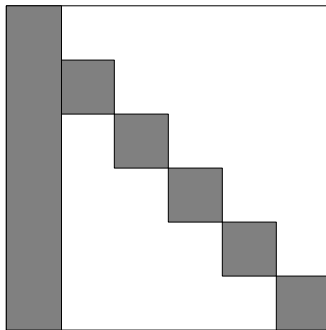
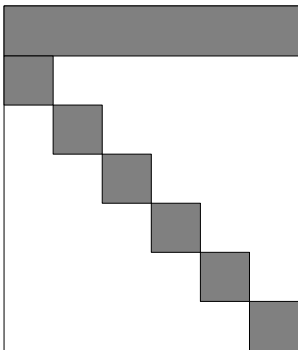
Problemas de grande-porte

- ▶ Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- ▶ Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;
- ▶ Entretanto, algumas aplicações podem resultar em modelos extremamente complicados para os softwares atuais, podendo levar horas, dias, meses, ... para se obter uma solução ótima;
- ▶ Por outro lado, muitos dos problemas que modelam situações reais possuem certas estruturas especiais que podem ser exploradas com o intuito de facilitar sua resolução.

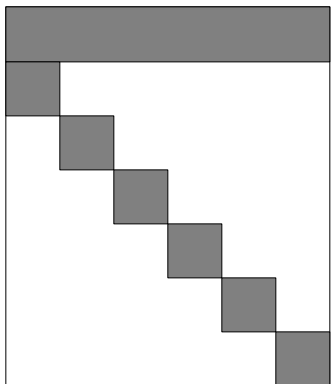
Problemas de grande-porte



Problemas de grande-porte

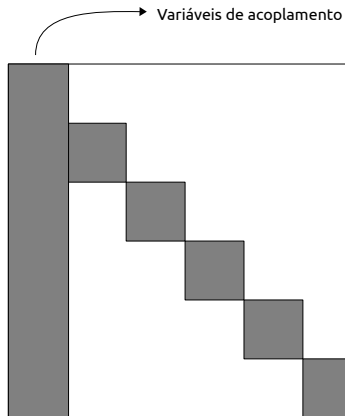


Problemas de grande-porte



→ Restrições de acoplamento

Problemas de grande-porte



Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e quanto estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Modelo: Formulação compacta

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T c_{it} x_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T h_{it} I_{it}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n a_i x_{it} \leq b_t, & t = 1, \dots, T, \\ & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, & i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T, \\ & I_{i0} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ & x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, & i = 1, \dots, n; \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: formulação compacta

$$\begin{aligned} \min \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} \\ & + 0.9x_{23} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\ & 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\ & 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\ & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{10} = 0, \quad I_{20} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$\begin{array}{llll}
 0.1 x_{11} & & 0.08 x_{21} & \leq 240 \\
 0.1 x_{12} & & 0.08 x_{22} & \leq 320 \\
 0.1 x_{13} & & 0.08 x_{23} & \leq 200 \\
 x_{11} & I_{10} - I_{11} & & = 900 \\
 x_{12} & I_{11} - I_{12} & & = 1800 \\
 x_{13} & I_{12} - I_{13} & & = 1800 \\
 & & x_{21} & I_{20} - I_{21} = 400 \\
 & & x_{22} & I_{21} - I_{22} = 600 \\
 & & x_{23} & I_{22} - I_{23} = 800
 \end{array}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} & I_{10} - I_{11} & = 900 \\
 x_{12} & I_{11} - I_{12} & = 1800 \\
 x_{13} & I_{12} - I_{13} & = 1800 \\
 & & \\
 x_{21} & I_{20} - I_{21} & = 400 \\
 x_{22} & I_{21} - I_{22} & = 600 \\
 & & \\
 x_{23} & I_{22} - I_{23} & = 800
 \end{array}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

x_{11}	$I_{10} - I_{11}$	= 900
x_{12}	$I_{11} - I_{12}$	= 1800
x_{13}	$I_{12} - I_{13}$	= 1800
x_{21}	$I_{20} - I_{21}$	= 400
x_{22}	$I_{21} - I_{22}$	= 600
x_{23}	$I_{22} - I_{23}$	= 800

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$0.1 x_{11}$	$0.08 x_{21}$	≤ 240
$0.1 x_{12}$	$0.08 x_{22}$	≤ 320
$0.1 x_{13}$	$0.08 x_{23}$	≤ 200
x_{11} $I_{10} - I_{11}$		$= 900$
x_{12} $I_{11} - I_{12}$		$= 1800$
x_{13} $I_{12} - I_{13}$		$= 1800$
x_{21} $I_{20} - I_{21}$		$= 400$
x_{22} $I_{21} - I_{22}$		$= 600$
x_{23} $I_{22} - I_{23}$		$= 800$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$0.1 x_{11}$	$0.08 x_{21}$	≤ 240
$0.1 x_{12}$	$0.08 x_{22}$	≤ 320
$0.1 x_{13}$	$0.08 x_{23}$	≤ 200
x_{11}	$I_{10} - I_{11}$	$= 900$
x_{12}	$I_{11} - I_{12}$	$= 1800$
x_{13}	$I_{12} - I_{13}$	$= 1800$
x_{21}	$I_{20} - I_{21}$	$= 400$
x_{22}	$I_{21} - I_{22}$	$= 600$
x_{23}	$I_{22} - I_{23}$	$= 800$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- ▶ Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- ▶ Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- ▶ Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- ▶ Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- ▶ Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;
- ▶ É importante que os blocos isolados correspondam a problemas que possam ser resolvidos de forma eficiente (ou por algum algoritmo especializado que tenha desempenho superior);

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- ▶ Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- ▶ Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;
- ▶ É importante que os blocos isolados correspondam a problemas que possam ser resolvidos de forma eficiente (ou por algum algoritmo especializado que tenha desempenho superior);
- ▶ Outra vantagem aparece quando uma ou mais variáveis dos blocos são inteiras, pois resultam em formulações mais fortes.

Revisão

▷ Dualidade

Revisão

▷ Dualidade

- ▶ Considere que o seguinte problema possua solução ótima x^* :

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- ▶ Existe um vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ tal que o seguinte problema é equivalente:

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x + (p^*)^T (b - Ax) \\ \text{s.a} & x \geq 0\end{array}$$

Revisão

▷ Dualidade

- ▶ Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}. \end{aligned}$$

- ▶ Seja $g(p)$ o valor ótimo deste problema relaxado (em função de p), i.e.

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}.$$

- ▶ Para qualquer $p \in \mathbb{R}^m$, temos $g(p) \leq f(x^*)$. Assim, temos um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Revisão

▷ Dualidade

Surgem então as questões:

- ▶ Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- ▶ Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Melhor limitante:

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}. \end{aligned}$$

Revisão

▷ Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned} g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0} \{c^T x - p^T Ax\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0} \{(c^T - p^T A)x\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^n (c_j - p^T a_j) x_j \right\} \\ &= p^T b + \sum_{j=1}^n \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j. \end{aligned}$$

Revisão

► Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \dots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, & (x_j \rightarrow \infty) \\ 0, & \text{c.c.} & (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;
- Como? Basta restringirmos p t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$;
- Dessa forma, $\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = 0$.

Revisão

▷ Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^n \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{g(p) \mid A^T p \leq c\} \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{p^T b \mid A^T p \leq c\}. \end{aligned}$$

(problema dual)

Relaxação Lagrangiana

Relaxação Lagrangiana

- ▶ A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;

Relaxação Lagrangiana

- ▶ A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;
- ▶ A diferença é que vamos dualizar (relaxar) um **subconjunto** de restrições do problema!

Relaxação Lagrangiana

- ▶ A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;
- ▶ A diferença é que vamos dualizar (relaxar) um **subconjunto** de restrições do problema!
- ▶ Em geral, vamos dualizar **apenas** as restrições complicantes (de acoplamento).

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: formulação compacta

$$\begin{aligned} \min \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\ & + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\ & 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\ & 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\ & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{10} = 0, \quad I_{20} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$0.1 x_{11}$	$0.08 x_{21}$	≤ 240
$0.1 x_{12}$	$0.08 x_{22}$	≤ 320
$0.1 x_{13}$	$0.08 x_{23}$	≤ 200
x_{11}	$I_{10} - I_{11}$	$= 900$
x_{12}	$I_{11} - I_{12}$	$= 1800$
x_{13}	$I_{12} - I_{13}$	$= 1800$
x_{21}	$I_{20} - I_{21}$	$= 400$
x_{22}	$I_{21} - I_{22}$	$= 600$
x_{23}	$I_{22} - I_{23}$	$= 800$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Multiplicadores $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & (1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\ & + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}) \\ & + \bar{p}_1(240 - 0.1x_{11} - 0.08x_{21}) \\ & + \bar{p}_2(320 - 0.1x_{12} - 0.08x_{22}) \\ & + \bar{p}_3(200 - 0.1x_{13} - 0.08x_{23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{10} = 0, \quad I_{20} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$\begin{aligned}
 \min \quad & (1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
 & + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}) \\
 & + \bar{p}_1(240 - 0.1x_{11} - 0.08x_{21}) \\
 & + \bar{p}_2(320 - 0.1x_{12} - 0.08x_{22}) \\
 & + \bar{p}_3(200 - 0.1x_{13} - 0.08x_{23}) \\
 \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
 & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
 & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
 & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
 & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
 & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
 & I_{10} = 0, \quad I_{20} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\
 & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0
 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 \\
 & +(1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\
 & +(2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
 & +(0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\
 & +(0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
 \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
 & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
 & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
 & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
 & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
 & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
 & I_{10} = 0, \quad I_{20} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\
 & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0
 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 +$$

$$+ \min \quad (1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\ + (2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & I_{10} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0 \end{aligned}$$

$$+ \min \quad (0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\ + (0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{20} = 0 \\ & x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\ & I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- ▶ Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- ▶ Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;
- ▶ Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- ▶ Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;
- ▶ Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- ▶ Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 +$$

$$\begin{aligned} + \min \quad & (1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\ & + (2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & I_{10} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \min \quad & (0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\ & + (0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{20} = 0 \\ & x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\ & I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

(Fornece limitante inferior para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$)

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p)$ = valor ótimo do subproblema 1;
- ▶ $f_2(p)$ = valor ótimo do subproblema 2;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p)$ = valor ótimo do subproblema 1;
- ▶ $f_2(p)$ = valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
-----	-------	-------	-------	-----------

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p)$ = valor ótimo do subproblema 1;
- ▶ $f_2(p)$ = valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p) = \text{valor ótimo do subproblema 1}$;
- ▶ $f_2(p) = \text{valor ótimo do subproblema 2}$;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p) = \text{valor ótimo do subproblema 1}$;
- ▶ $f_2(p) = \text{valor ótimo do subproblema 2}$;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2, -1, 0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p) = \text{valor ótimo do subproblema 1}$;
- ▶ $f_2(p) = \text{valor ótimo do subproblema 2}$;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2, -1, 0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00
$(-1.875, -1.875, 0)$	-1050	7593.75	1370.00	7913.75

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- ▶ $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- ▶ $f_1(p) = \text{valor ótimo do subproblema 1}$;
- ▶ $f_2(p) = \text{valor ótimo do subproblema 2}$;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2, -1, 0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00
$(-1.875, -1.875, 0)$	-1050	7593.75	1370.00	7913.75

(valor ótimo do problema original: 7913.75)

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- ▶ Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;
- ▶ Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- ▶ Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- ▶ Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;
- ▶ Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- ▶ Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.
- ▶ Existem $p_1^*, p_2^*, p_3^* \leq 0$ tais que o valor obtido é **igual** ao valor ótimo do problema original!

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$\max_{p_1, p_2, p_3 \leq 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$+ \min (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} \\ + (2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & I_{10} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0 \end{aligned}$$

$$+ \min (0.5 - 0.08p_1)x_{21} + (0.5 - 0.08p_2)x_{22} \\ + (0.9 - 0.08p_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & I_{20} = 0 \\ & x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\ & I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\min \quad f(x) = c^T x,$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b,$$

$$Dx = d,$$

$$x \geq 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^h$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\min \quad f(x) = c^T x,$$

$$\text{s.a} \quad Ax = b, \quad (\text{restrições de acoplamento})$$

$$Dx = d, \quad (\text{estrutura em blocos})$$

$$x \geq 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad d \in \mathbb{R}^h$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = c^T x, \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \quad (\text{restrições de acoplamento}) \\ & Dx = d, \quad (\text{estrutura em blocos}) \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^h$$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) = c^T x, \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & \left[\begin{array}{cccc} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{array} \right] x = d, \\
 & x \geq 0,
 \end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) = c^T x, \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = d, \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) = c^T x, \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}
 \min & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & \left[\begin{array}{cccc} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{array} \right], \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}
 \min & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

(obs.: o sinal de transposto foi omitido para simplificar a notação)

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K, \\
 \text{s.a} \quad & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b, \\
 & \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll}\min & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K \\ \text{s.a} & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b \\ & D^1 x^1 = d^1 \\ & D^2 x^2 = d^2 \\ & \ddots \vdots \\ & D^K x^K = d^K \\ & x \geq 0\end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{array}{ll} \min_{x \geq 0} & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K \\ \text{s.a} & A^1 x^1 + A^2 x^2 + \dots + A^K x^K = b \\ & D^1 x^1 = d^1 \\ & \quad D^2 x^2 = d^2 \\ & \quad \quad \ddots \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad D^K x^K = d^K \end{array}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
 g(p) = \min_{x \geq 0} \quad & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K + p^T (b - A^1 x^1 - A^2 x^2 - \dots - A^K x^K) \\
 \text{s.a} \quad & D^1 x^1 = d^1 \\
 & D^2 x^2 = d^2 \\
 & \vdots \\
 & D^K x^K = d^K
 \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
 g(p) = \min_{x \geq 0} \quad & c^1 x^1 + c^2 x^2 + \dots + c^K x^K + p^T (b - A^1 x^1 - A^2 x^2 - \dots - A^K x^K) \\
 \text{s.a} \quad & D^1 x^1 = d^1 \\
 & D^2 x^2 = d^2 \\
 & \vdots \\
 & D^K x^K = d^K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(p) = \min_{x \geq 0} \quad & p^T b + (c^1 - p^T A^1) x^1 + (c^2 - p^T A^2) x^2 + \dots + (c^K - p^T A^K) x^K \\
 \text{s.a} \quad & D^1 x^1 = d^1 \\
 & D^2 x^2 = d^2 \\
 & \vdots \\
 & D^K x^K = d^K
 \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$g(p) = p^T b$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{ (c^1 - p^T A^1) x^1 \mid D^1 x^1 = d^1 \} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{ (c^1 - p^T A^1) x^1 \mid D^1 x^1 = d^1 \} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{ (c^2 - p^T A^2) x^2 \mid D^2 x^2 = d^2 \} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{ (c^1 - p^T A^1) x^1 \mid D^1 x^1 = d^1 \} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{ (c^2 - p^T A^2) x^2 \mid D^2 x^2 = d^2 \} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{ (c^K - p^T A^K) x^K \mid D^K x^K = d^K \} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned}
 g(p) &= p^T b \\
 &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
 &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
 &= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
 \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned}
 g(p) &= p^T b \\
 &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
 &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
 &= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
 \end{aligned}$$

► Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned}
 g(p) &= p^T b \\
 &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
 &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
 &= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
 \end{aligned}$$

► Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned}g(p) &= p^T b \\&\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\&\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\&\quad + \dots \\&\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\&= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}\end{aligned}$$

- ▶ Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- ▶ Problema Dual Lagrangiano:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\ &= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \end{aligned}$$

- ▶ Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- ▶ Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p)$$

Relaxação Lagrangiana

► Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\ &= p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^K \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- ▶ A dificuldade está em

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- ▶ A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^* ;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- ▶ A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^* ;
- ▶ Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- ▶ A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^* ;
- ▶ Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;
- ▶ Logo, precisamos ter alguma forma inteligente de determinar p^* ;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- ▶ A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- ▶ Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- ▶ Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- ▶ A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^* ;
- ▶ Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;
- ▶ Logo, precisamos ter alguma forma inteligente de determinar p^* ;
- ▶ Métodos mais usados: Planos de corte, Subgradiente;

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

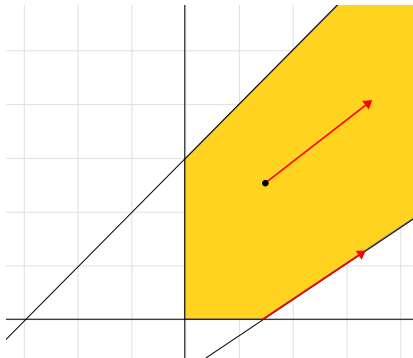
Definição: Raio.

- ▶ Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.



Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- ▶ Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

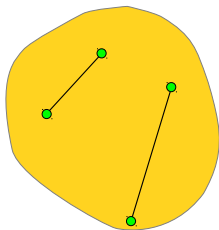
- ▶ Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário. Se $f(x + \varepsilon r) > f(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$, então r é chamado de *raio de subida* de f .

Revisão

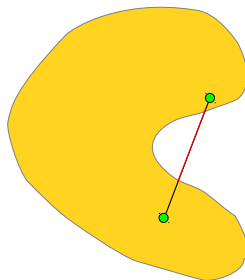
▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Conjunto convexo.

- ▶ Um conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para quaisquer $x, y \in S$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tivermos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.



convexo



não-convexo

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

- ▶ Sejam os vetores $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Então:
 1. O vetor $y = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$ é chamado de *combinação convexa* dos vetores $x^1, \dots, x^k$;
 2. O *envoltório convexo* dos vetores $x^1, \dots, x^k$ é o conjunto de todas as combinações convexas destes vetores.

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

x^1



x^3

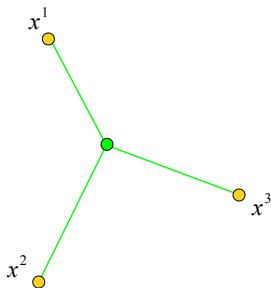


x^2



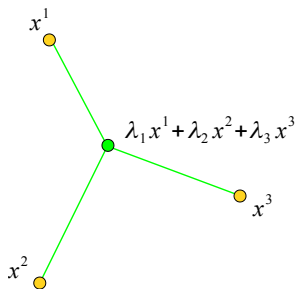
Revisão

▷ Definições importantes em Otimização



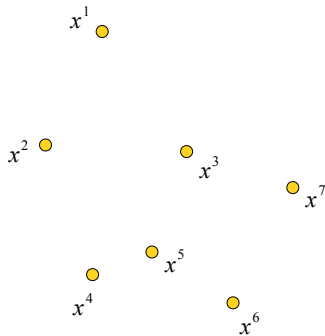
Revisão

▷ Definições importantes em Otimização



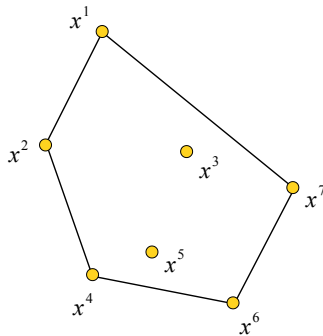
Revisão

▷ Envoltório convexo



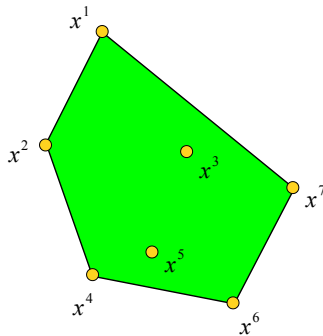
Revisão

▷ Envoltório convexo



Revisão

▷ Envoltório convexo



Teorema da Representação/Resolução

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio.

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q, q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r, r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$.

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1; \lambda_q \geq 0,$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1; \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0,$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1; \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q, q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r, r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1; \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Em outras palavras, temos que:

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \mid \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0 \right\}.$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q, q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r, r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1; \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Em outras palavras, temos que:

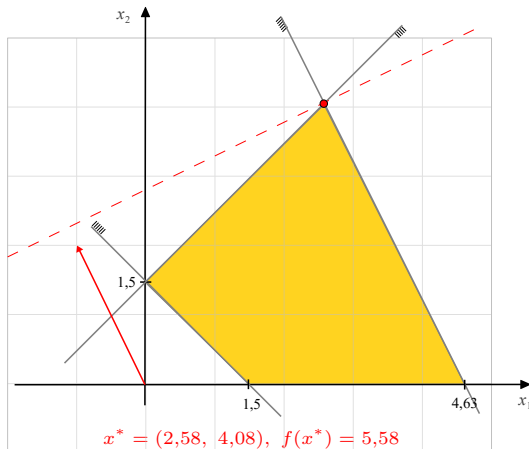
$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \mid \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0 \right\}.$$

Para demonstração, veja p. ex.: Bertsimas e Tsitsiklis (1997), p. 179; ou, Bazaraa, Sherali e Shetty (1993), p. 60.

Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

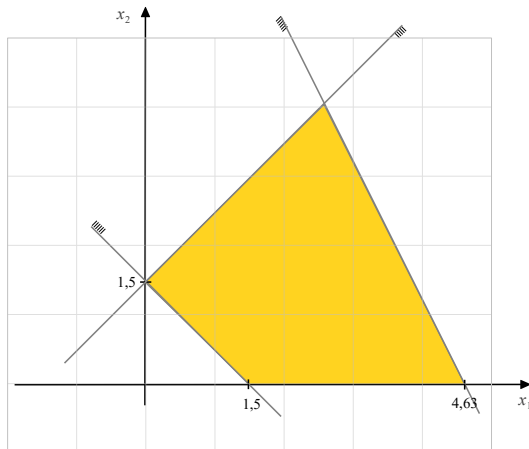
$$\begin{array}{ll}
 \max & -1x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

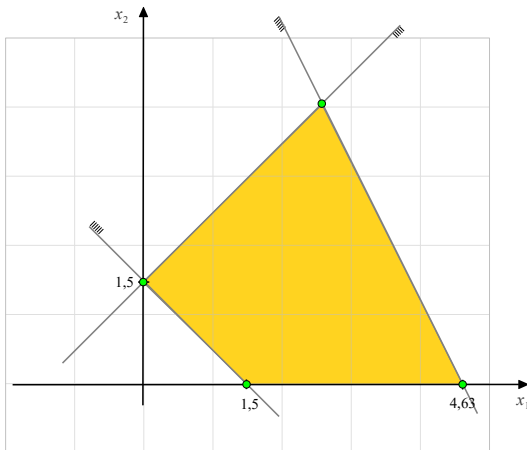
$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

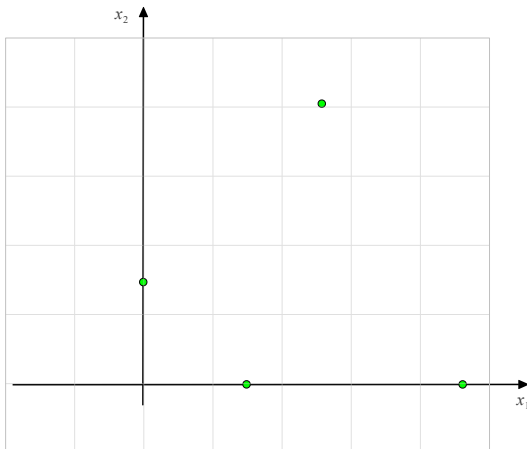


Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

Pontos extremos:

- ▶ $\bar{x}^1 = (0; 1,5);$
- ▶ $\bar{x}^2 = (1,5; 0);$
- ▶ $\bar{x}^3 = (4,63; 0);$
- ▶ $\bar{x}^4 = (2,58; 4,08).$



Teorema da Representação/Resolução

► Ilustração

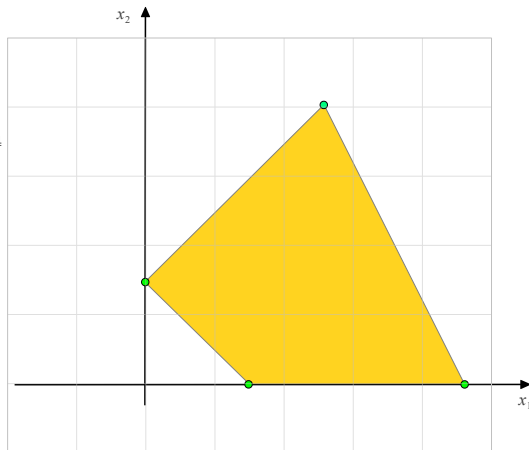
Combinação convexa:

$$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \lambda_3 \bar{x}^3 + \lambda_4 \bar{x}^4$$

com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$;

Sendo:

- $\bar{x}^1 = (0; 1,5)$;
- $\bar{x}^2 = (1,5; 0)$;
- $\bar{x}^3 = (4,63; 0)$;
- $\bar{x}^4 = (2,58; 4,08)$.



Teorema da Representação/Resolução

► Ilustração

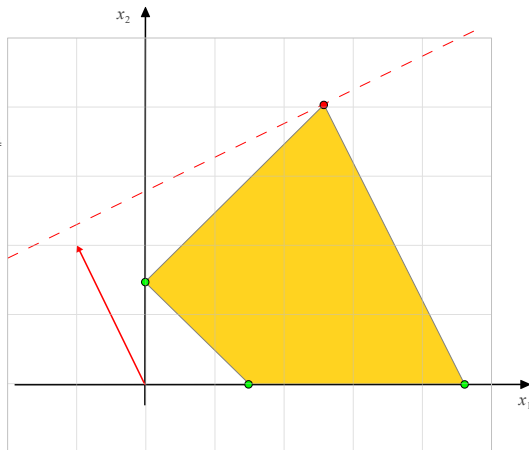
Combinação convexa:

$$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \lambda_3 \bar{x}^3 + \lambda_4 \bar{x}^4$$

com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$;

Sendo:

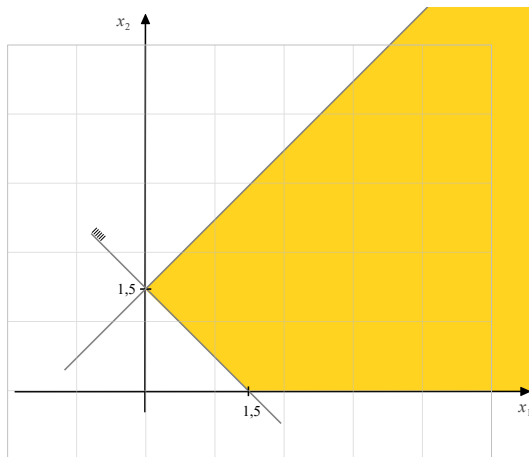
- $\bar{x}^1 = (0; 1,5)$;
- $\bar{x}^2 = (1,5; 0)$;
- $\bar{x}^3 = (4,63; 0)$;
- $\bar{x}^4 = (2,58; 4,08)$.



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

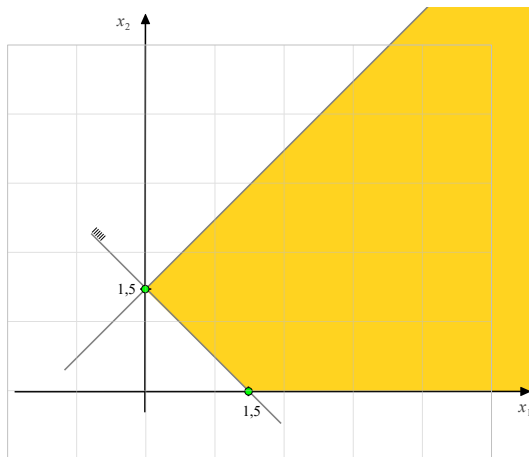
$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

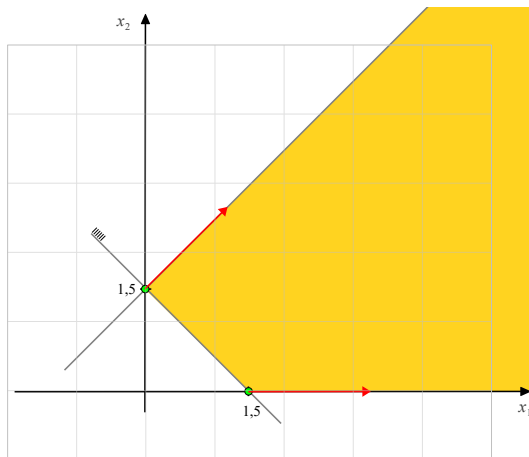
$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

$$\mathcal{X} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

► Ilustração

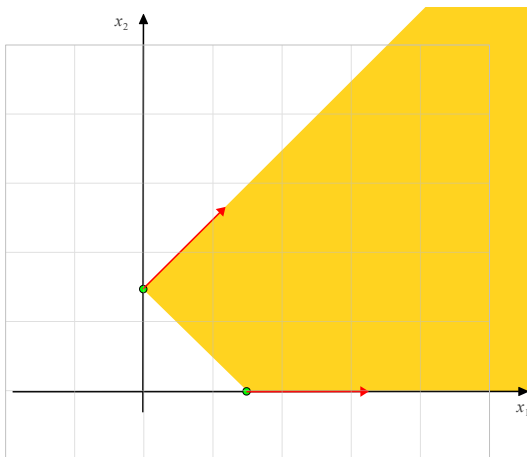
Combinação convexa e linear:

$$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \mu_5 \bar{x}^5 + \mu_6 \bar{x}^6$$

com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \mu_5, \mu_6 \geq 0$

Sendo:

- $\bar{x}^1 = (0; 1,5);$
- $\bar{x}^2 = (1,5; 0);$
- $\bar{x}^5 = (1; 1);$
- $\bar{x}^6 = (1; 0);$



Teorema da Representação/Resolução

- ▶ O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.

Teorema da Representação/Resolução

- ▶ O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.
- ▶ Na relaxação Lagrangiana, permite o uso do método de planos de corte para a resolução do dual Lagrangiano;

Teorema da Representação/Resolução

- ▶ O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.
- ▶ Na relaxação Lagrangiana, permite o uso do método de planos de corte para a resolução do dual Lagrangiano;
- ▶ Na decomposição de Dantzig-Wolfe é usado para substituir a variável $x \in \mathcal{X}$ pela combinação de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$:

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r, \quad \text{com} \quad \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?