



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 10.1: O Problema de Dimensionamento de Lotes

Apresentação

Objetivos desta semana:

- Conhecer e modelar dois problemas clássicos em Otimização: o Problema de Dimensionamento de Lotes e o Problema de Corte de Estoque;

Apresentação - Tópico 10.1

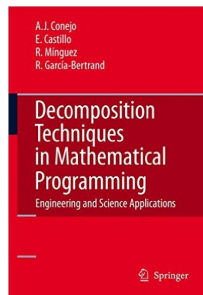
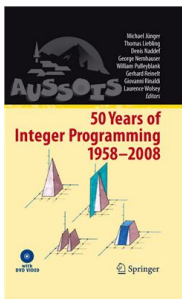
Objetivos deste tópico:

- ▶ Conhecer o Problema de Dimensionamento de Lotes e aplicações;
- ▶ Aprender a modelar matematicamente algumas variantes desse problema.

Vídeo-aula:

- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=UPzWVIgU0ac>

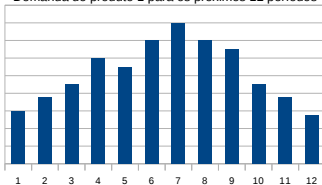
Bibliografia adicional para as próximas semanas



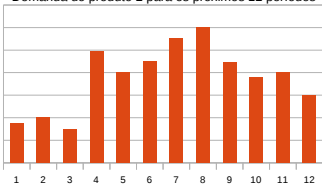
- ▶ Vanderbeck & Wolsey, *Reformulation and Decomposition of Integer Programs*, em: 50 Years of Integer Programming (1958–2008), Cap. 13 (p. 431–502), Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- ▶ Conejo, Castillo, Mínguez & García-Bertrand, *Decomposition Techniques in Mathematical Programming*, Springer Berlin Heidelberg, 2006;
- ▶ Artigos científicos selecionados.

Planejamento da produção

Demanda do produto 1 para os próximos 12 períodos



Demanda do produto 2 para os próximos 12 períodos



Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.
- ▶ Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)?

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.
- ▶ Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.
- ▶ Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- ▶ Há um custo de estocagem, além do custo de produção;

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.
- ▶ Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- ▶ Há um custo de estocagem, além do custo de produção;
- ▶ Pode envolver restrições de capacidade máxima, custos e tempo de preparação (*setup*), entre outros requisitos;

Planejamento da produção

Vamos assumir que a demanda do produto é conhecida e varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- ▶ d_{it} : demanda do produto i no período t , $t = 1, \dots, T$.
- ▶ Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- ▶ Há um custo de estocagem, além do custo de produção;
- ▶ Pode envolver restrições de capacidade máxima, custos e tempo de preparação (*setup*), entre outros requisitos;
- ▶ Busca-se um *trade-off* entre os custos envolvidos.

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

▶ Produção lote-por-lote:

A cada período, produz exatamente a quantidade demandada, isto é, produz d_{it} unidades do produto i no período t .

▷ Estratégias simples

A cada período, produz exatamente a quantidade demandada, isto é, produz d_{it} unidades do produto i no período t .

[illegible]

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

▶ Produção em período fixo:

Produz a cada P períodos a quantidade correspondente à demanda do período atual e dos próximos $P - 1$ períodos. Assim, ocorre produção apenas nos períodos $1, (1 + P), (1 + 2P), \dots$

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

▶ Produção em período fixo:

Produz a cada P períodos a quantidade correspondente à demanda do período atual e dos próximos $P - 1$ períodos. Assim, ocorre produção apenas nos períodos $1, (1 + P), (1 + 2P), \dots$

Exemplo de produção de um produto com $P = 3$:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	7	4	0	12	17	22	28	19	12	9	9	6
Produção	11	0	0	51	0	0	59	0	0	24	0	0
Estoque	4	0	0	39	22	0	31	12	0	15	6	0

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

- ▶ Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

- ▶ Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?
- ▶ Garantem sempre a melhor decisão?

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

- ▶ Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?
- ▶ Garantem sempre a melhor decisão?
- ▶ E se tivermos capacidade máxima de produção?

Planejamento da produção

▷ Estratégias simples

- ▶ Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?
- ▶ Garantem sempre a melhor decisão?
- ▶ E se tivermos capacidade máxima de produção?
- ▶ E quanto aos custos de estocagem e preparação de máquinas?

Planejamento da produção

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R\$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- ▶ Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- ▶ Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);
- ▶ A demanda de cada produto em cada período é conhecida;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- ▶ Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);
- ▶ A demanda de cada produto em cada período é conhecida;
- ▶ Determinar quanto produzir e quanto estocar de cada produto em cada período do horizonte do planejamento, de modo a satisfazer a demanda de cada período, buscando-se minimizar os custos;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Exemplo (simplificado)

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. ~~A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2.~~ A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;
- ▶ d_{it} : demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;
- ▶ d_{it} : demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ c_{it} : custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;
- ▶ d_{it} : demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ c_{it} : custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ h_{it} : custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;
- ▶ d_{it} : demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ c_{it} : custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ h_{it} : custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.
- ▶ a_i : horas necessárias para produzir 1 un do prod $i \in \mathcal{P}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados (capacidade) e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- ▶ $\mathcal{P}$: Conjunto de produtos;
- ▶ $\mathcal{T}$: Conjunto de períodos;
- ▶ d_{it} : demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ c_{it} : custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ h_{it} : custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.
- ▶ a_i : horas necessárias para produzir 1 un do prod $i \in \mathcal{P}$;
- ▶ b_t : horas disponíveis no período $t \in \mathcal{T}$.

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

1

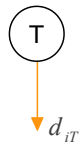
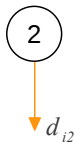
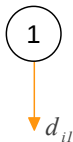
2

T

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

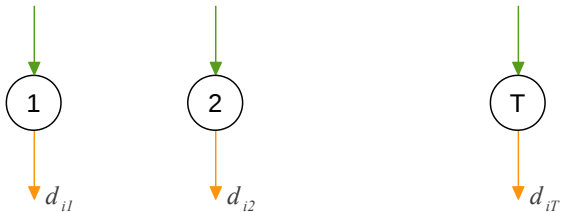
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

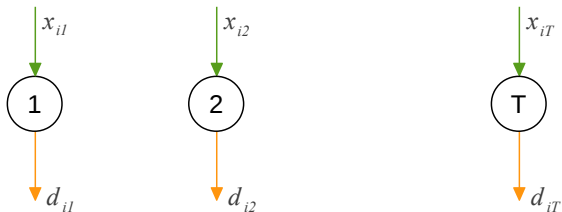
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

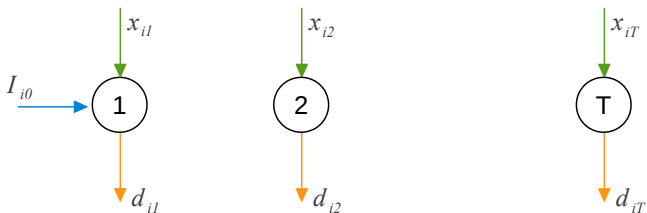
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

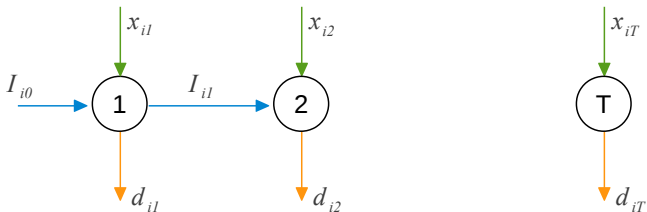
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

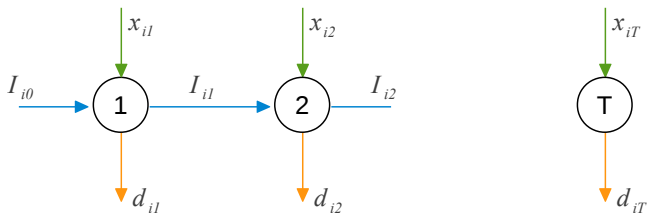
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

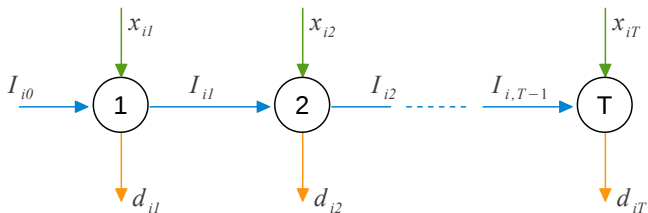
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

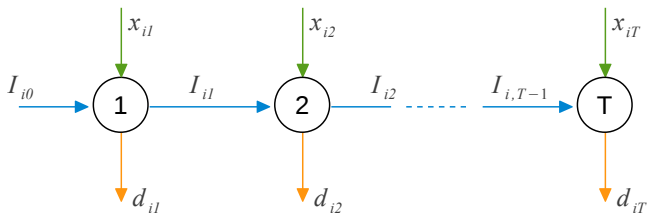
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Variáveis de decisão:

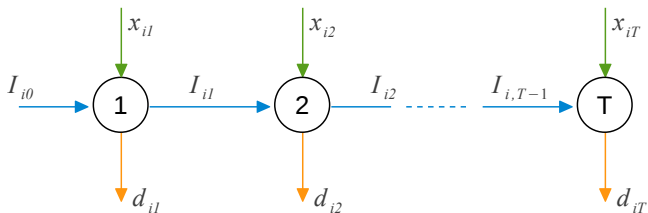


- x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Variáveis de decisão:



- x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- I_{it} : qtd em estoque do produto $i \in \mathcal{P}$ ao final do período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

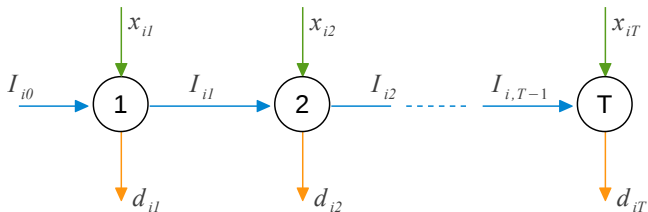
▷ Modelagem

Restrições:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

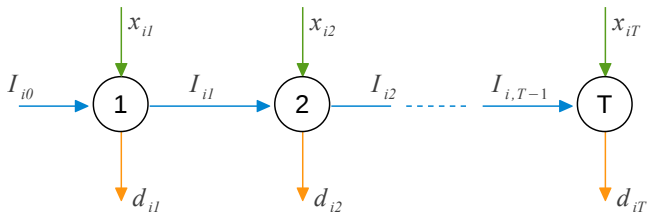
Restrições:



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

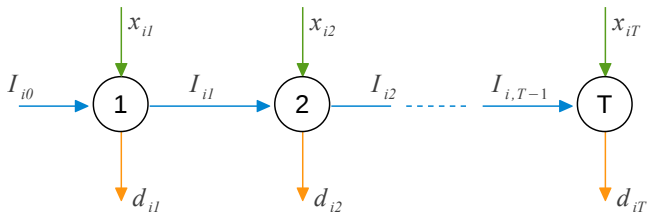


► Conservação de estoque:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

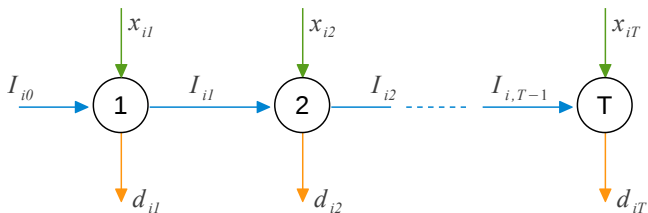


- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

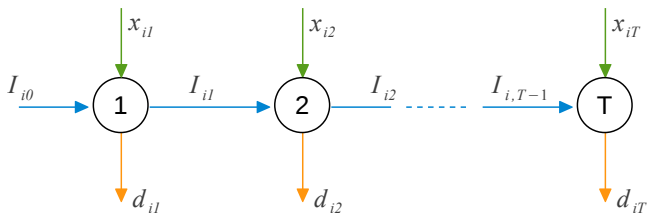


- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;
- Atendimento da demanda:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

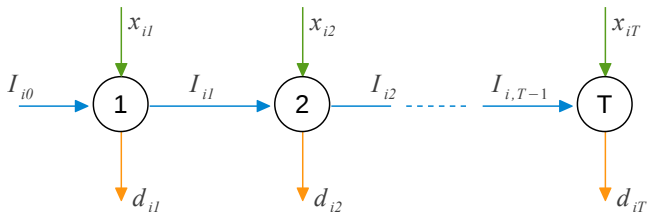


- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;
- Atendimento da demanda: $x_{it} + I_{i,t-1} \geq d_{it}$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

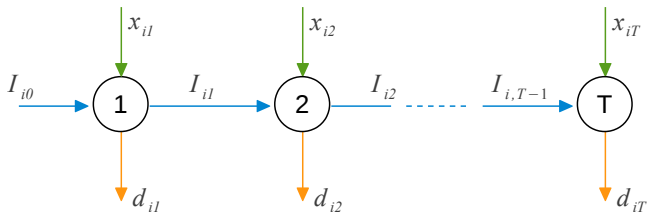


- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;
- Atendimento da demanda: $x_{it} + I_{i,t-1} \geq d_{it} \Leftrightarrow I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

Restrições:

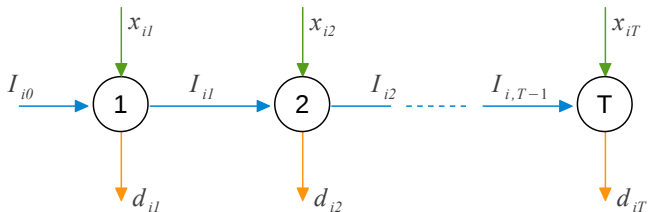


- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;
- Atendimento da demanda: $x_{it} + I_{i,t-1} \geq d_{it} \Leftrightarrow I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T}$;
- Estoque inicial:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

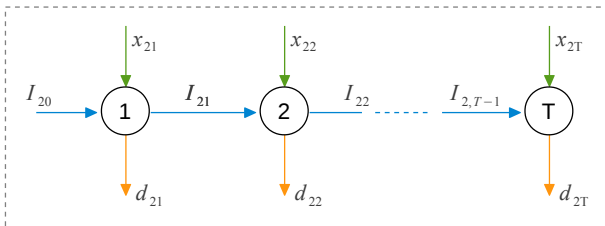
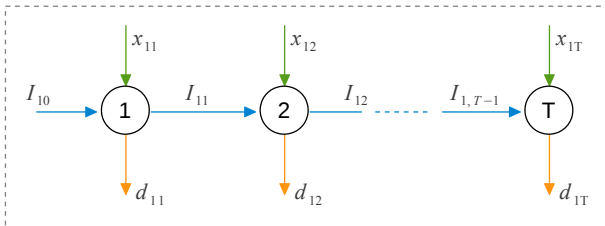
Restrições:



- Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T} : t > 0$;
- Atendimento da demanda: $x_{it} + I_{i,t-1} \geq d_{it} \Leftrightarrow I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{T}$;
- Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

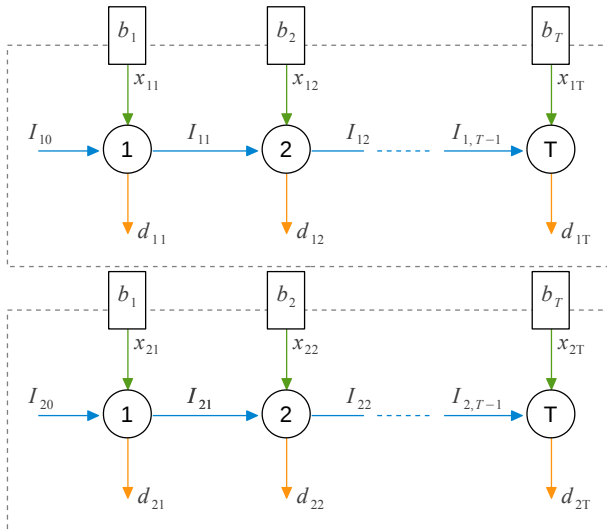
Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem



Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem





Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Capacidade máxima:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, t \in \mathcal{T};$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, t \in \mathcal{T};$

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0, i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}.$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

► Restrições:

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, t \in \mathcal{T};$

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0, i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}.$

► Custos:

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

► Restrições:

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, t \in \mathcal{T};$

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0, i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}.$

► Custos:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it}$$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

► Restrições:

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, t \in \mathcal{T};$

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0, i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}.$

► Custos:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it}.$$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

► Modelagem

$$\min \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it}$$

$$\text{s.a} \quad x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, \quad i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T},$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, \quad t \in \mathcal{T},$$

$$I_{i0} = 0, \quad i \in \mathcal{P},$$

$$x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, \quad i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}.$$

Problema de dimensionamento de lotes capacitado

▷ Exemplo (simplificado): modelo com dados

$$\begin{aligned} \min \quad & 1,0x_{11} + 1,5x_{12} + 2,0x_{13} + 0,5x_{21} + 0,5x_{22} + 0,9x_{23} \\ & + 0,5I_{11} + 0,25I_{12} + 0,25I_{21} + 0,25I_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ & 0,1x_{11} + 0,08x_{21} \leq 240 \\ & 0,1x_{12} + 0,08x_{22} \leq 320 \\ & 0,1x_{13} + 0,08x_{23} \leq 200 \\ & I_{10} = 0 \\ & I_{20} = 0 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0 \\ & I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0 \end{aligned}$$

Planejamento da produção

▷ Exemplo (simplificado)

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. ~~A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2.~~ A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Planejamento da produção

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R\$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;
- ▶ Por exemplo, limpar a máquina, troca de funcionários, etc;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;
- ▶ Por exemplo, limpar a máquina, troca de funcionários, *etc*;
- ▶ Este custo/tempo não depende da quantidade produzida no período;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;
- ▶ Por exemplo, limpar a máquina, troca de funcionários, *etc*;
- ▶ Este custo/tempo não depende da quantidade produzida no período;
- ▶ Uma forma de evitar ou reduzir a preparação é por meio da produção/estoque em períodos anteriores;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;
- ▶ Por exemplo, limpar a máquina, troca de funcionários, *etc*;
- ▶ Este custo/tempo não depende da quantidade produzida no período;
- ▶ Uma forma de evitar ou reduzir a preparação é por meio da produção/estoque em períodos anteriores;
- ▶ s_{it} : custo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- ▶ Em algumas situações práticas, há um custo fixo e/ou tempo adicional aplicados quando há produção no período: **custo e/ou tempo de preparação (setup)**;
- ▶ Por exemplo, limpar a máquina, troca de funcionários, etc;
- ▶ Este custo/tempo não depende da quantidade produzida no período;
- ▶ Uma forma de evitar ou reduzir a preparação é por meio da produção/estoque em períodos anteriores;
- ▶ s_{it} : custo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- ▶ st_i : tempo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$.

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

I_{it} : qtd em estoque do produto $i \in \mathcal{P}$ ao final no período $t \in \mathcal{T}$;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

I_{it} : qtd em estoque do produto $i \in \mathcal{P}$ ao final no período $t \in \mathcal{T}$;

y_{it} :

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

I_{it} : qtd em estoque do produto $i \in \mathcal{P}$ ao final no período $t \in \mathcal{T}$;

y_{it} : 1, se $x_{it} > 0$; 0, caso contrário.

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_{it} : qtd produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

I_{it} : qtd em estoque do produto $i \in \mathcal{P}$ ao final no período $t \in \mathcal{T}$;

y_{it} : 1, se $x_{it} > 0$; 0, caso contrário.

(ou seja, $y_{it} = 1$ se, e somente se, há produção do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$)

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Restrições:

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação:

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

► Modelagem

► Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação: $x_{it} \leq Cy_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação: $x_{it} \leq Cy_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$; (C suficientemente grande)

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

► Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação: $x_{it} \leq Cy_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$; (C suficientemente grande)

Capacidade máxima:

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação: $x_{it} \leq Cy_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$; (C suficientemente grande)

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} (a_i x_{it}$

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

► Modelagem

► Restrições:

Conservação de estoque: $x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} : t > 0$;

Estoque inicial: $I_{i0} = 0$, $i \in \mathcal{P}$;

Atendimento da demanda: $I_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$;

Preparação: $x_{it} \leq C y_{it}$, $i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}$; (C suficientemente grande)

Capacidade máxima: $\sum_{i \in \mathcal{P}} (a_i x_{it} + s_i y_{it}) \leq b_t$, $t \in \mathcal{T}$.

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

▶ Custos:

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

► Modelagem

► Custos:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} s_{it} y_{it}.$$

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

$$\min \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} s_{it} y_{it}$$

$$\text{s.a} \quad x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, \quad i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T},$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} (a_i x_{it} + s_{it} y_{it}) \leq b_t, \quad t \in \mathcal{T},$$

$$x_{it} \leq C y_{it}, \quad i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T},$$

$$I_{i0} = 0, \quad i \in \mathcal{P},$$

$$x_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0, \quad y_{it} \in \{0, 1\} \quad i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}.$$

PDL capacitado com tempo e custo de preparação

▷ Exemplo: modelo com dados

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 1,0x_{11} + 1,5x_{12} + 2,0x_{13} + 0,5x_{21} + 0,5x_{22} + 0,9x_{23} \\
 & + 0,5I_{11} + 0,25I_{12} + 0,25I_{21} + 0,25I_{22} \\
 & + 2,0y_{11} + 4,0y_{12} + 4,0y_{13} + 8,0y_{21} + 8,0y_{22} + 8,0y_{23} \\
 \text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
 & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
 & \vdots \\
 & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
 & 0,1x_{11} + 0,08x_{21} + 12y_{11} + 8y_{21} \leq 240 \\
 & 0,1x_{12} + 0,08x_{22} + 12y_{12} + 8y_{22} \leq 320 \\
 & 0,1x_{13} + 0,08x_{23} + 12y_{13} + 8y_{23} \leq 200 \\
 & x_{11} \leq 4500y_{11} \\
 & x_{12} \leq 4500y_{12} \\
 & \vdots \\
 & x_{23} \leq 1800y_{23} \\
 & I_{10} = 0 \\
 & I_{20} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23}, I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \geq 0 \\
 & y_{11}, y_{12}, \dots, y_{23} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Planejamento da produção

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

Período	Bebida 1			Bebida 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R\$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R\$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R\$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

Planejamento da produção

▷ Exercício

Elabore uma formulação por colunas para o problema de dimensionamento de lotes capacitado (*dica: para cada item, defina planos de produção/estoque ao longo do horizonte*). Resolva a formulação obtida por um software de otimização, descreva a solução ótima e seu valor ótimo, e compare com os resultados obtidos com os modelos anteriores.

Planejamento da produção

▷ Exercício

Uma fundição produz dois tipos de peças a partir de ligas metálicas. Um cliente fez um pedido de diferentes quantidades dessas peças para os próximos 3 meses. Deseja-se determinar quanto produzir de cada peça em cada mês, de modo a minimizar os custos de produção, estocagem e preparação, considerando as informações da tabela a seguir:

Período	Peça 1			Peça 2		
	1	2	3	1	2	3
Demanda (ton)	13	20	25	23	33	21
Custo produção (R\$/ton)	1720	1690	1950	1700	1850	2000
Custo estocagem (R\$/ton)	230	200	—	250	240	—
Custo preparação (R\$)	100	180	200	200	250	210

Modele o problema e obtenha uma solução ótima usando um *software* de otimização. Qual a melhor forma de produzir e estocar?

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?