



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.5: Notação matricial, operações com matrizes e soluções básicas
em programação linear

Objetivos deste tópico

- ▶ Compreender como usar a notação matricial e realizar operações com matrizes;
- ▶ Estudar o conceito de base, solução geral e solução básica.

Notação matricial

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x =$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c =$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A =$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
 \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b =$$

Notação matricial

$$\begin{array}{ll}\min & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3, -2, 0, 0, 0]$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3, -2, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3, -2, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = c^T x$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 & = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} =$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b$$

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]$$

Notação algébrica

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i = b_1 \\ & \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i = b_2 \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i = b_m \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{array}$$

Notação algébrica

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j, \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ & x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.\end{array}$$

Notação matricial

$$\text{minimizar } f(x) = c^T x$$

$$\text{sujeito a } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}} + a_1x_1 + a_4x_4 = b$$

$$\text{com } A_{\mathcal{B}} = [a_3 \ a_2 \ a_5] \text{ e } x_{\mathcal{B}} = [x_3 \ x_2 \ x_5]^T$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}x_{\mathcal{B}} + a_1x_1 + a_4x_4 = b$$

definindo $\mathbf{B} := A_{\mathcal{B}}$

Notação matricial

Essa submatriz pode ajudar a determinar o valor de x_B . Como?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$Bx_B = b - a_1x_1 - a_4x_4$$

Notação matricial

Se ela for **invertível**, deixamos apenas o vetor x_B do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \right)$$

$$B^{-1} (Bx_B = b - a_1x_1 - a_4x_4)$$

Notação matricial

Se ela for **invertível**, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \right)$$

$$B^{-1} (Bx_{\mathcal{B}} = b - a_1x_1 - a_4x_4)$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de **base** (a submatriz deve ser invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de **base** (a submatriz deve ser invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de **base** (a submatriz deve ser invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de **base** (a submatriz deve ser invertível).

Notação matricial

▷ Solução geral

- ▶ Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores a $x_{\mathcal{N}}$* ;

Notação matricial

▷ Solução geral

- ▶ Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores a $x_{\mathcal{N}}$* ;

- ▶ Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

▷ Solução geral

- ▶ Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores a $x_{\mathcal{N}}$* ;

- ▶ Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4$$

- ▶ Por exemplo: para $x_1 = x_4 = 0$, temos a solução $x = (0; 5; 1,5; 0; 0,5)$;

Notação matricial

▷ Solução geral

- ▶ Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores a $x_{\mathcal{N}}$* ;

- ▶ Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4$$

- ▶ Por exemplo: para $x_1 = x_4 = 0$, temos a solução $x = (0; 5; 1,5; 0; 0,5)$;
- ▶ Outro exemplo: $x = 1$ e $x_4 = 0$, temos $x = (1; 4,5; 1,15; 0; 0,35)$.

Notação matricial

▷ Solução básica

- ▶ Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

Notação matricial

▷ Solução básica

- ▶ Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

- ▶ Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4, \quad \text{com } x_1 = x_4 = 0$$

Notação matricial

▷ Solução básica

- ▶ Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

- ▶ Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- ▶ Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- ▶ Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

- ▶ Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0; 0; 3; 1; 3)$;

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- ▶ Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

- ▶ Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0; 0; 3; 1; 3)$;
- ▶ Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1; 1; 2,2; 0,7; 2,1)$;

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- ▶ Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

- ▶ Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0; 0; 3; 1; 3)$;
- ▶ Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1; 1; 2,2; 0,7; 2,1)$;
- ▶ No caso geral, quantos elementos em $\mathcal{B}$?

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- ▶ Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

- ▶ Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0; 0; 3; 1; 3)$;
- ▶ Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1; 1; 2,2; 0,7; 2,1)$;
- ▶ No caso geral, quantos elementos em $\mathcal{B}$?
O mesmo número de equações.

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Quando o *número variáveis* é *igual* ao *número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única!*

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Quando o *número variáveis* é *igual* ao *número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única!* Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ Quando o *número variáveis* é *igual* ao *número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única!* Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

► Observações

- Quando o *número variáveis* é *igual* ao *número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única!* Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Quando o *número variáveis* é *maior* que o *número de equações*, pode-se ter várias bases diferentes e, assim, há um grau de liberdade para escolha das soluções, indicando que o sistema possui *múltiplas soluções factíveis*.

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ No caso do sistema de equações do problema das ligas metálicas, temos 5 variáveis e 3 equações, indicando que temos um grau de liberdade para definir uma solução para o sistema (ou seja, pode existir mais de uma solução que satisfaça o sistema);

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 & = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & & + x_5 = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

▷ Observações

- ▶ No caso do sistema de equações do problema das ligas metálicas, temos 5 variáveis e 3 equações, indicando que temos um grau de liberdade para definir uma solução para o sistema (ou seja, pode existir mais de uma solução que satisfaça o sistema);

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 = 1 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & + x_5 = 3 \end{cases}$$

- ▶ O grau de liberdade é 2 ($=5-3$), indicando que há mais de uma solução factível para o sistema. Ao definirmos uma base $\mathcal{B}$, os valores de $x_{\mathcal{B}}$ ficam determinados de forma única ao atribuirmos valores para as duas outras coordenadas, resultando em diferentes pontos factíveis.

Notação matricial

▷ Observações

Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{bmatrix} x_2$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_2x_2$$

Notação matricial

▷ Observações

Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,5 \\ 0,15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1,5 \\ 5 \\ -2,5 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?