



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.3: Resolução gráfica em programação linear

Objetivos deste tópico

- ▶ Estudar como representar um problema de programação linear graficamente e obter sua solução ótima e valor ótimo pelo gráfico.

Programação linear

▷ Resolução gráfica

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- ▶ Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- ▶ Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;
- ▶ Esta abordagem é possível apenas para problemas muito pequenos (até 2 variáveis);

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- ▶ Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;
- ▶ Esta abordagem é possível apenas para problemas muito pequenos (até 2 variáveis);
- ▶ Mesmo assim, os *insights* proporcionados ajudam a entender melhor os conceitos fundamentais de um problema de Programação Linear e a interpretar as respostas dos *softwares*.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

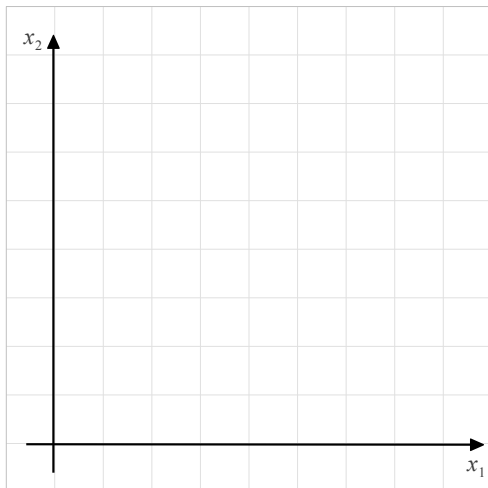
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

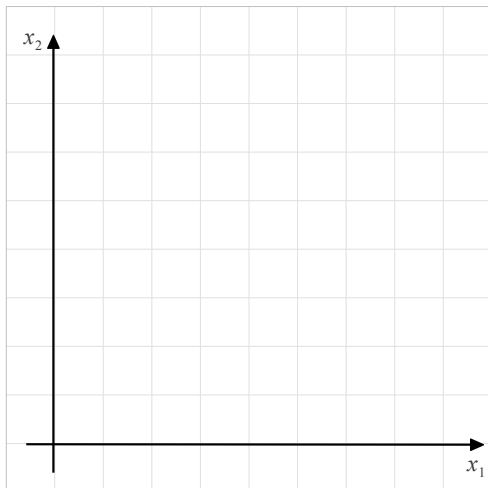
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

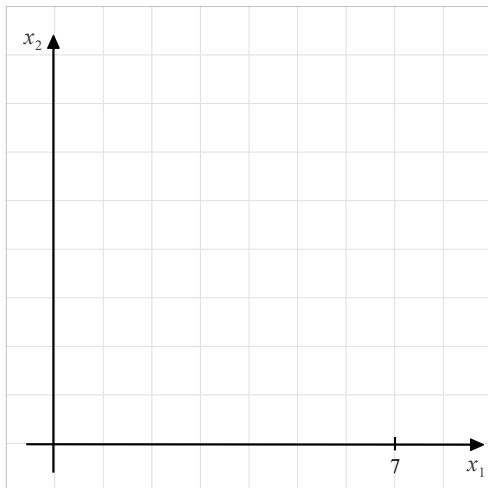
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

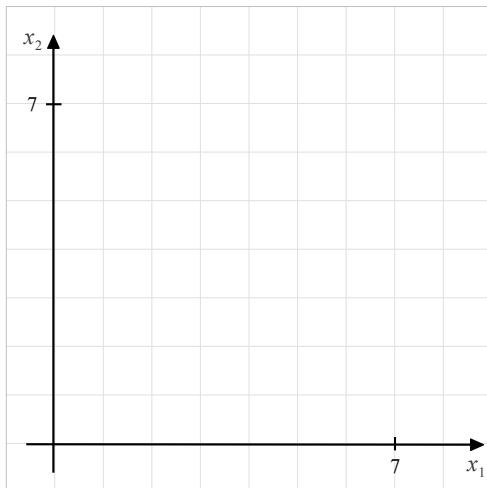
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

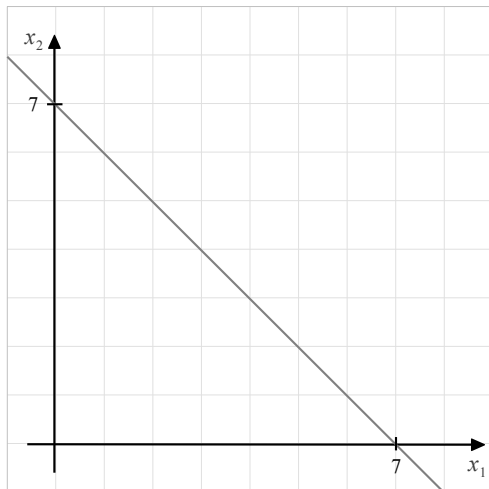
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

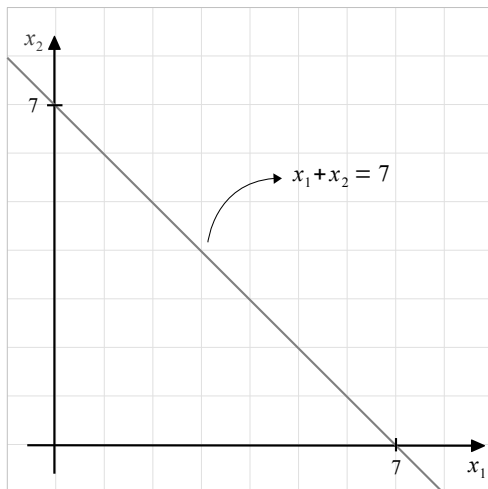
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

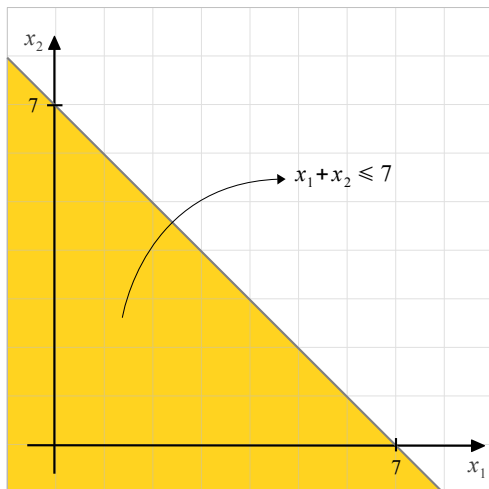
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

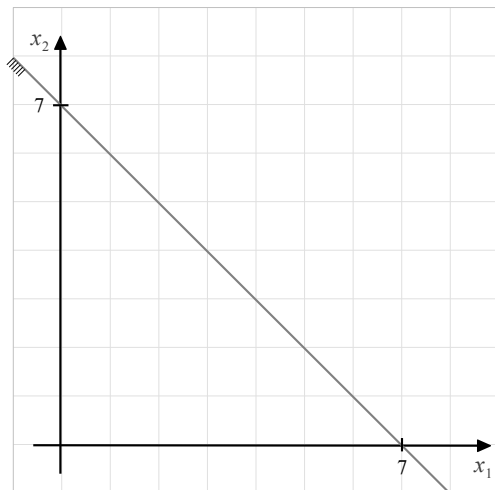
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

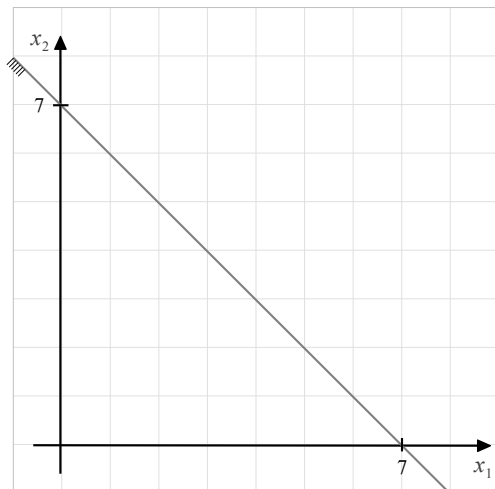
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

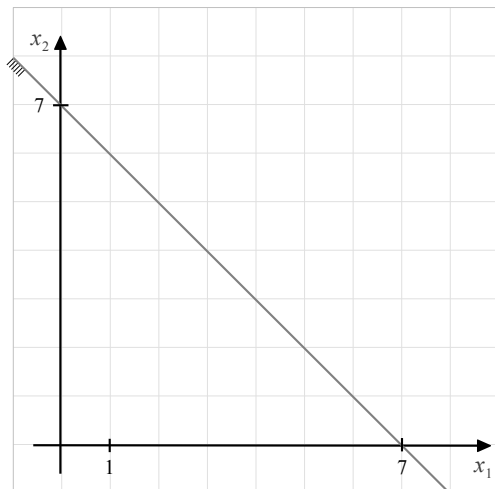
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

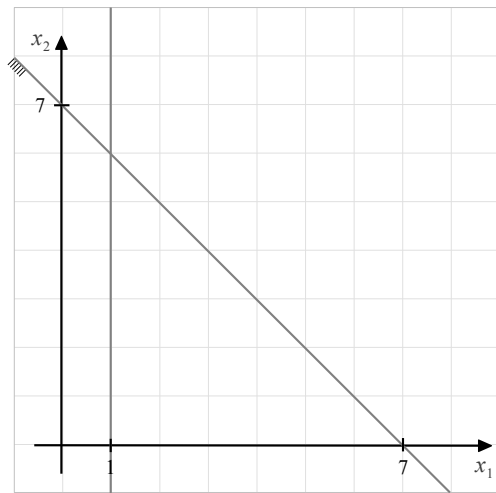
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

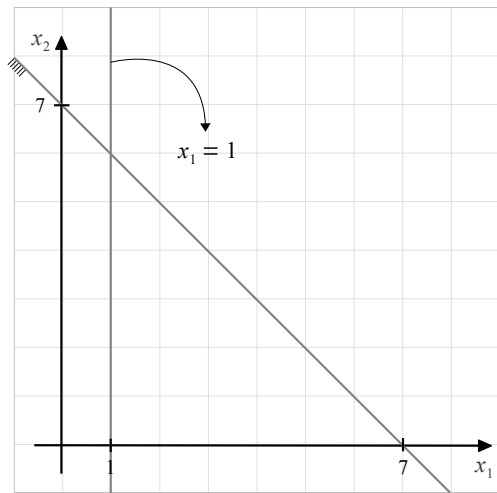
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

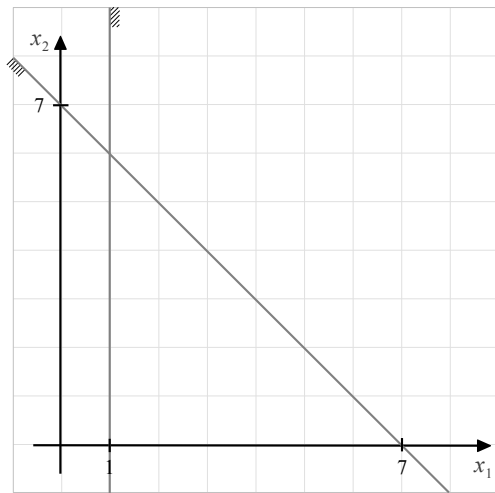
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

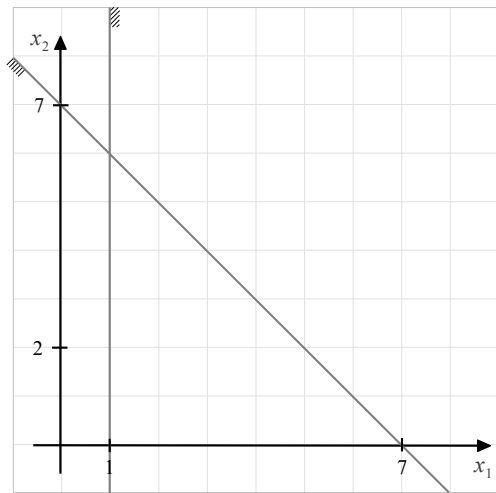
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

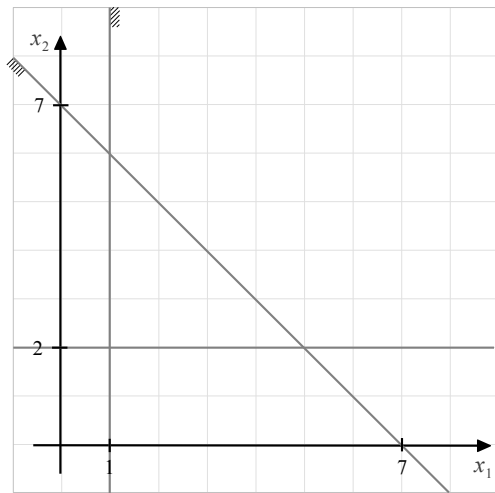
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

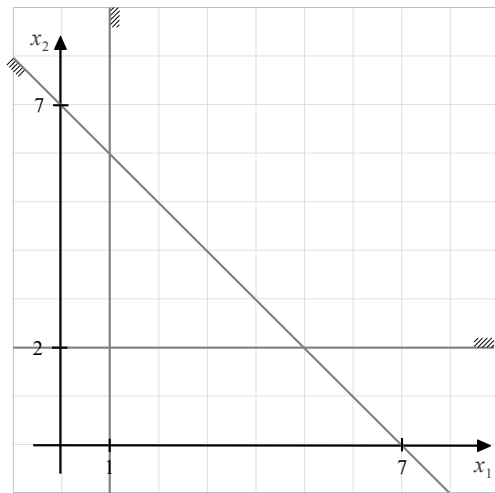
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

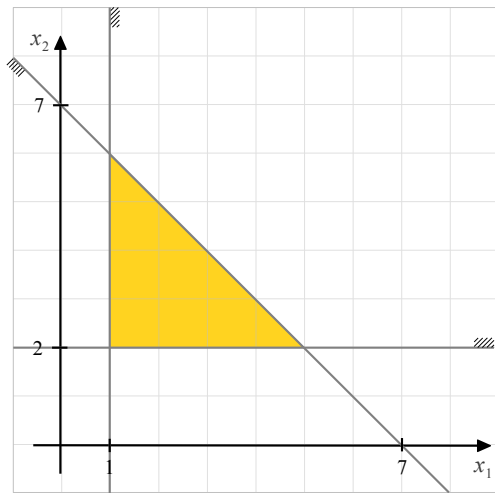
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

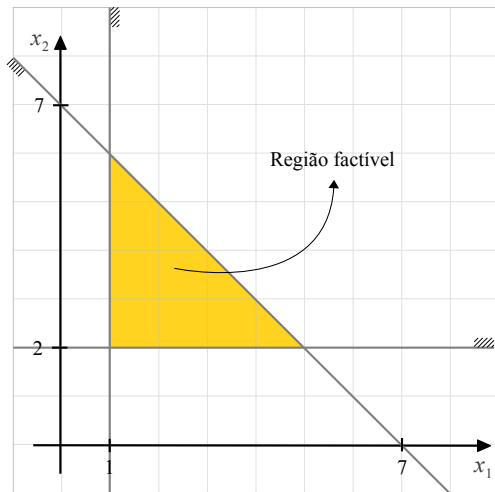
$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

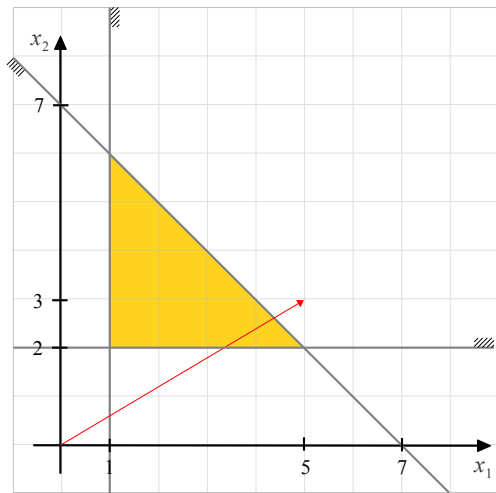
$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

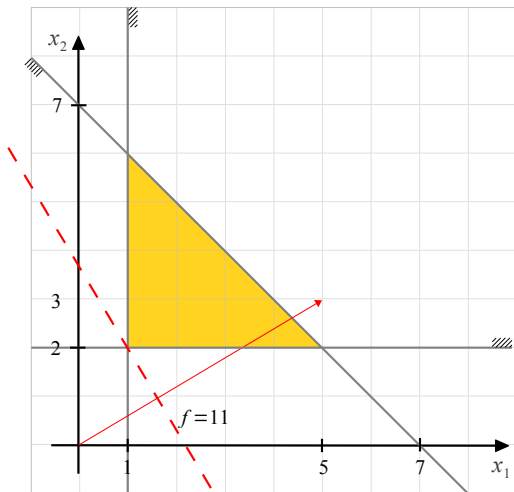
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

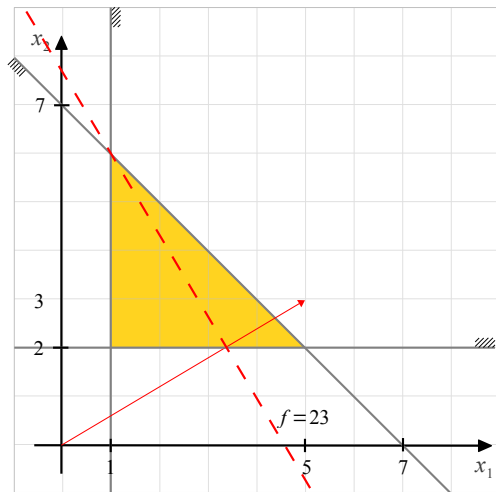
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

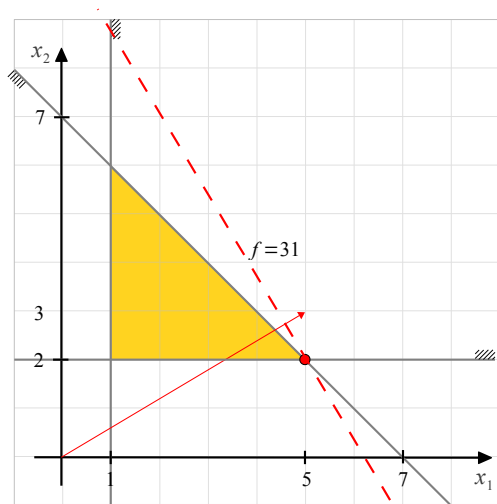
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

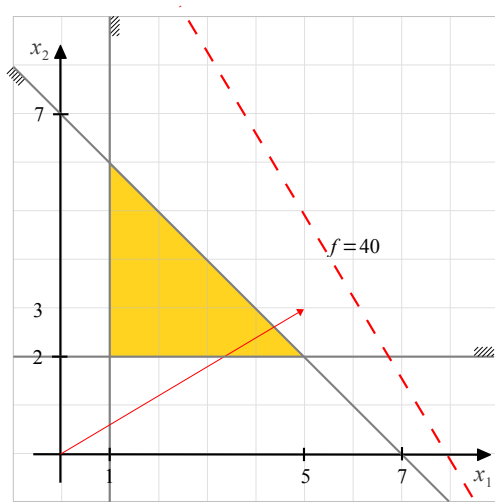
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

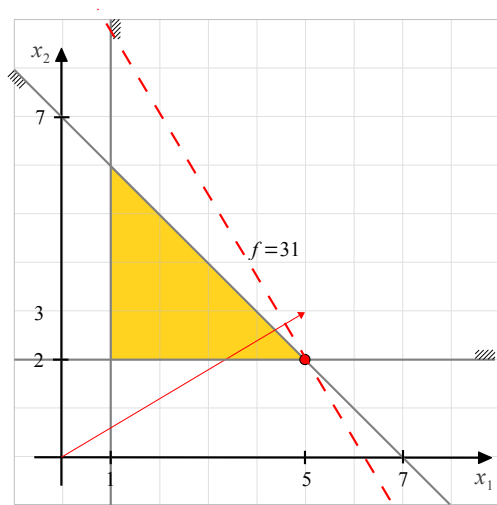
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

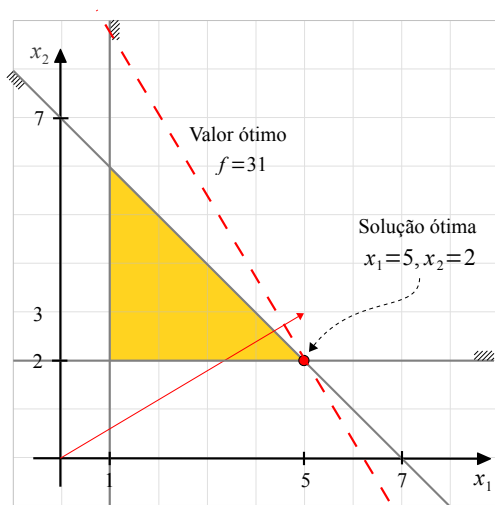
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

- ▶ Portanto, pelo método gráfico, obtemos a solução ótima $x_1 = 5, x_2 = 2$, com valor ótimo 31.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
 - ▶ Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
 - ▶ Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- ▶ A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
 - ▶ Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- ▶ A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- ▶ Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
 - ▶ Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- ▶ A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- ▶ Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).
- ▶ Obter o ponto em que a curva de nível corresponde ao maior valor dentro da região factível.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de minimização)

- ▶ Para cada restrição do problema:
 - ▶ Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
 - ▶ Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- ▶ A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- ▶ Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).
- ▶ Obter o ponto em que a curva de nível corresponde ao menor valor dentro da região factível.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

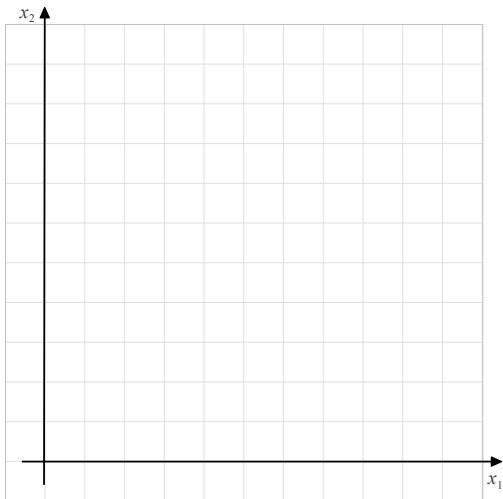
$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

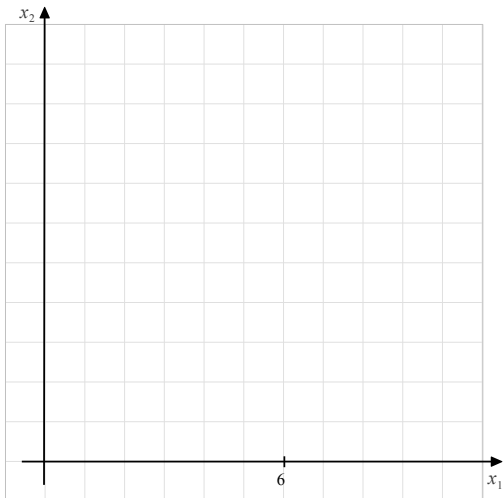
$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

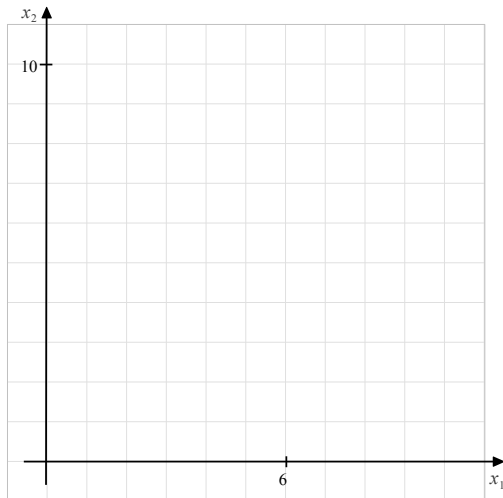
$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

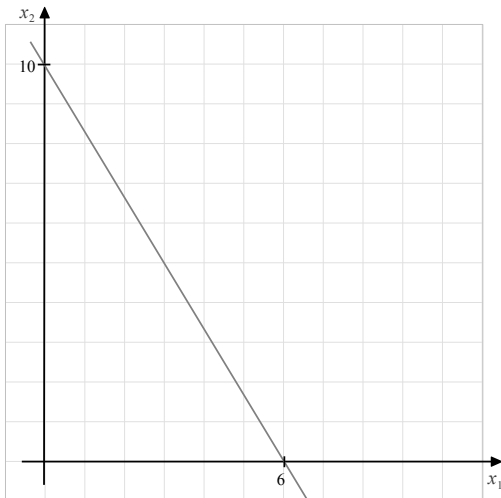
$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

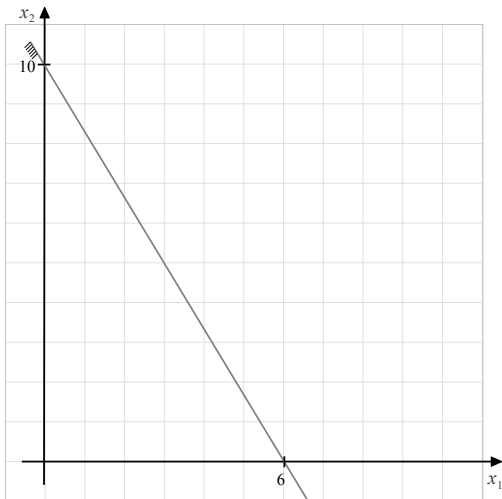
$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

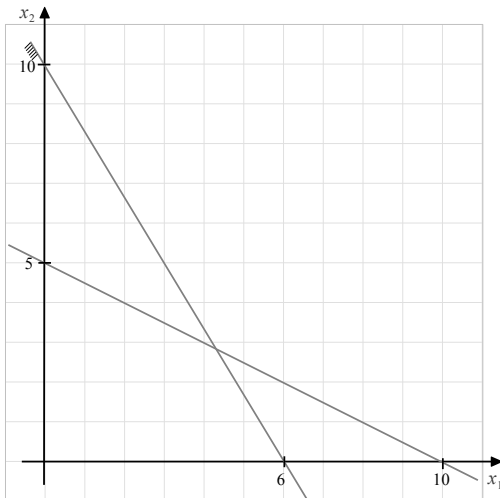
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

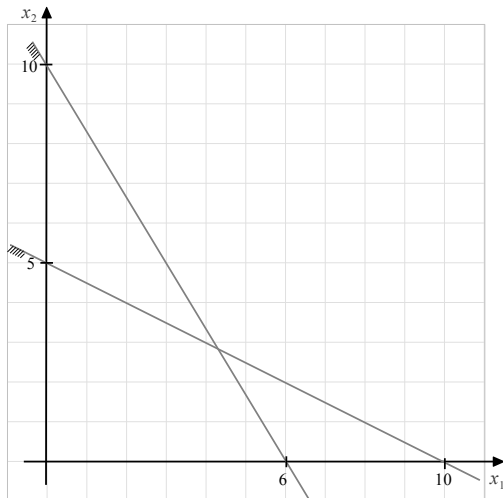
$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

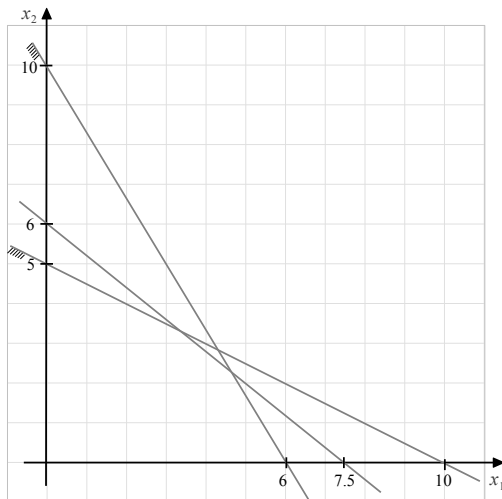
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

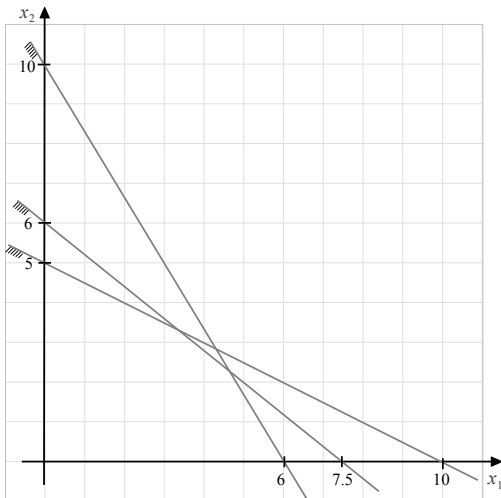
$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

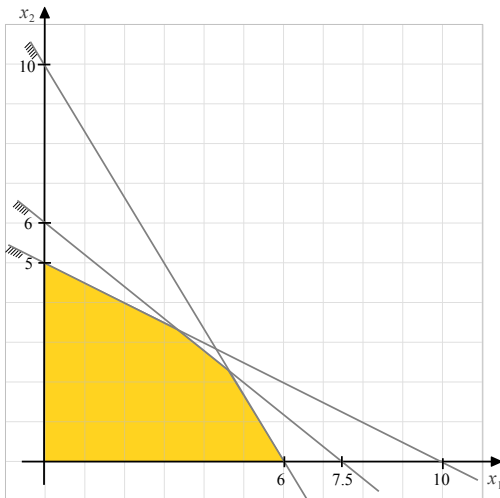
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

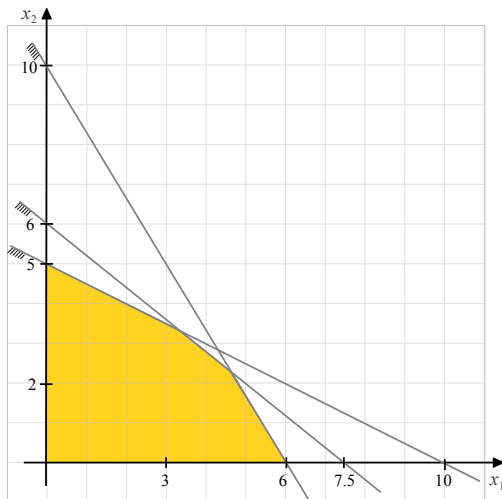
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

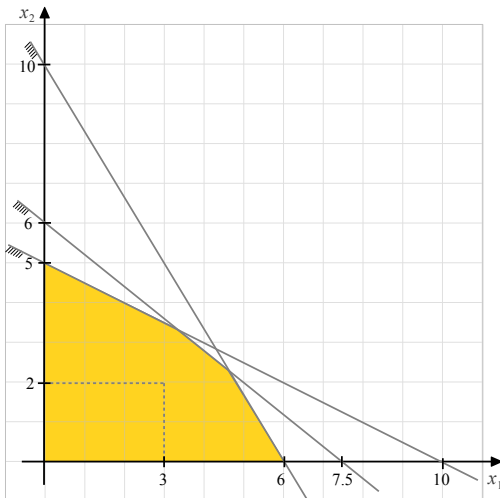
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

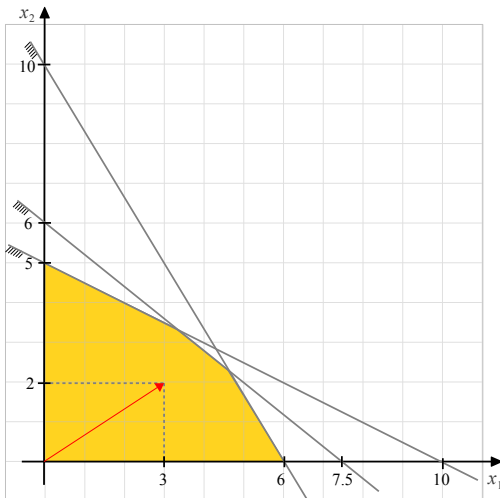
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

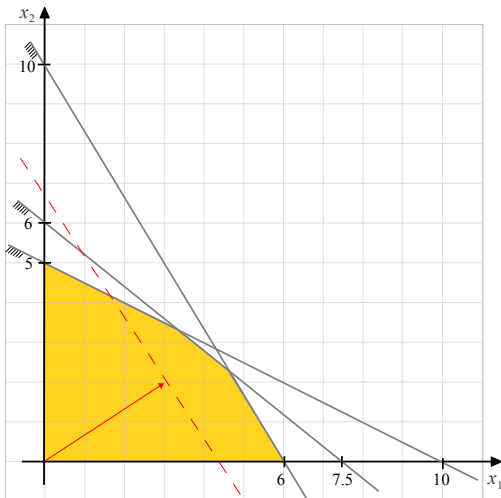
$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

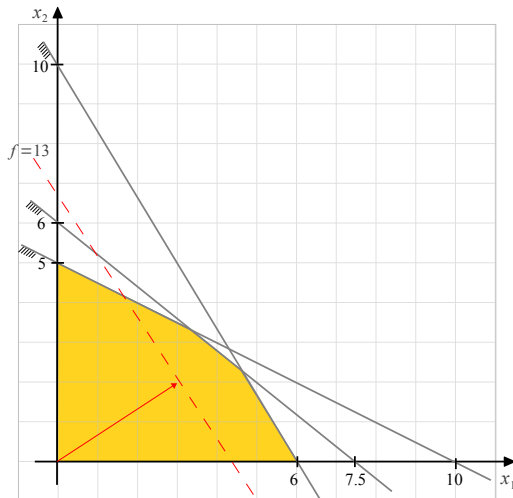
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

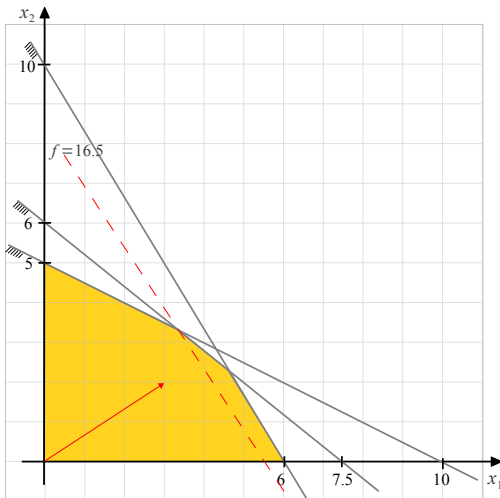
$$\begin{array}{ll}
 \max & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

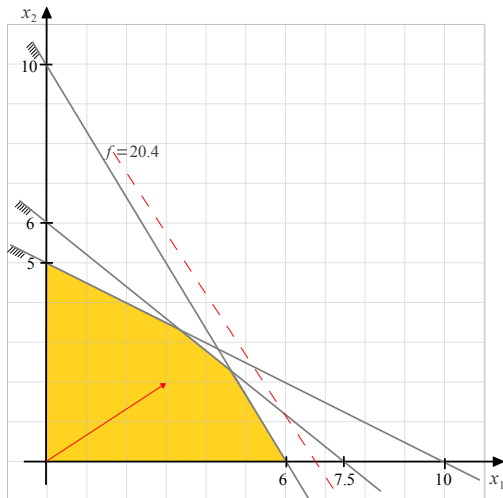
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

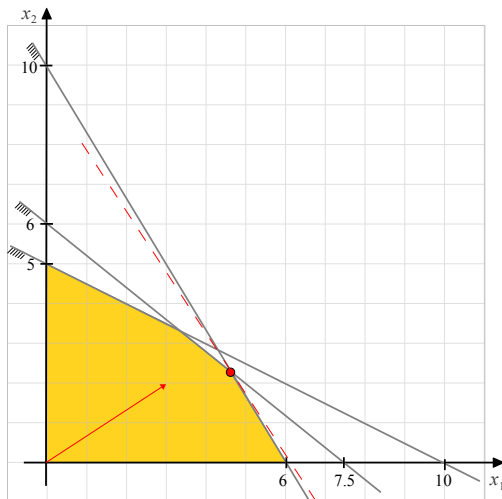
$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- ▶ A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- ▶ A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.
- ▶ Assim, deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 & = & 3 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- ▶ A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.
- ▶ Assim, deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 &= 3 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 &= 3 \end{cases}$$

- ▶ Portanto, a solução ótima é $x_1 \approx 4,62$, $x_2 \approx 2,3$, com valor ótimo 18,46.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- ▶ A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- ▶ A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

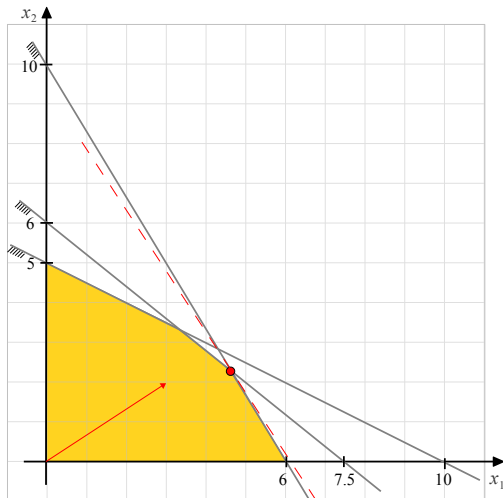
Perguntas:

- ▶ Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- ▶ A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

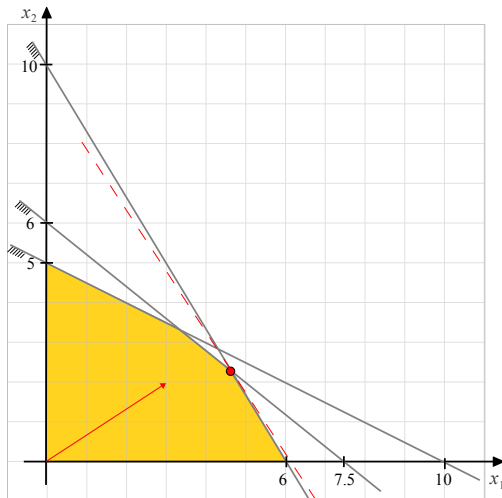
Perguntas:

- ▶ Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?
- ▶ Se a empresa pudesse comprar 2 ton adicionais de apenas um deles, qual seria a melhor escolha?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

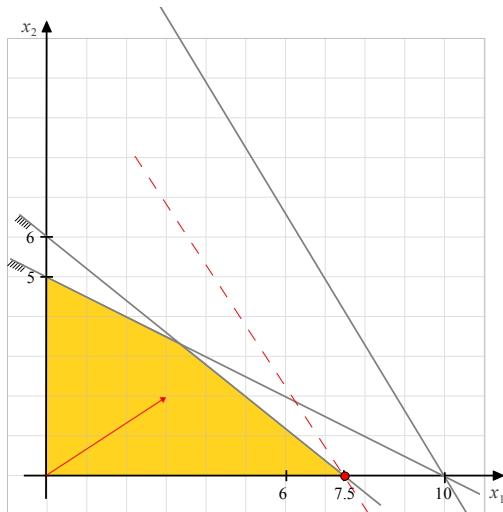
$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

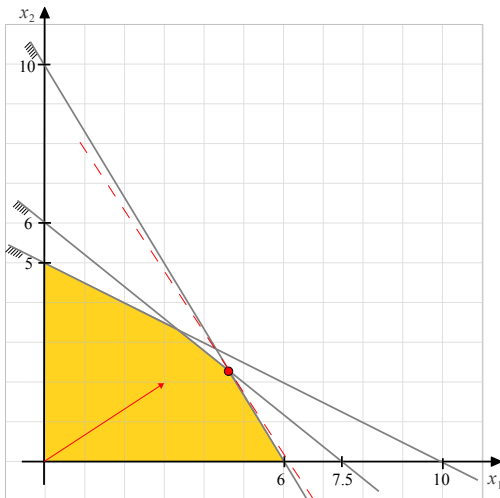
$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 5 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

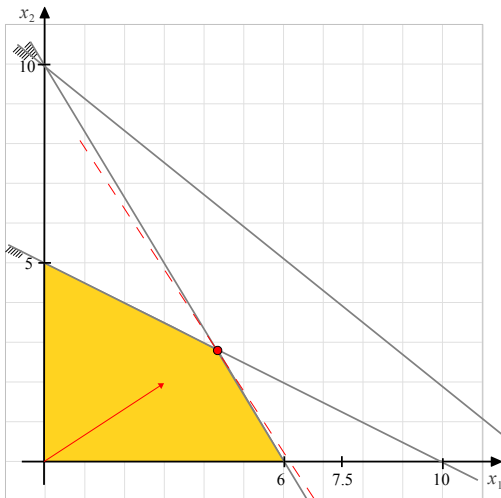
$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- ▶ A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

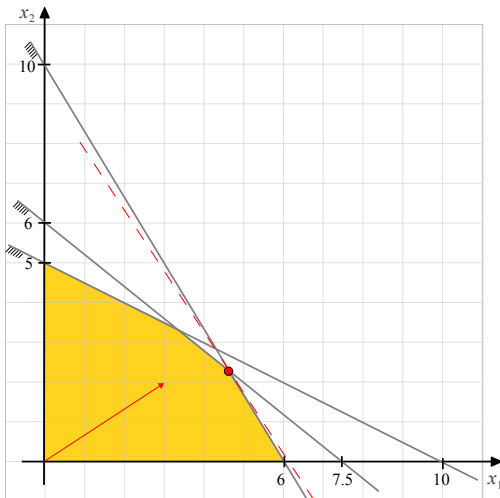
Perguntas:

- ▶ Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?
- ▶ Se a empresa pudesse comprar 2 ton adicionais de apenas um deles, qual seria a melhor escolha?
- ▶ Qual seria a solução ótima do problema, se os preços das ligas 1 e 2 fossem R\$ 2 mil e R\$ 3 mil, respec.?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

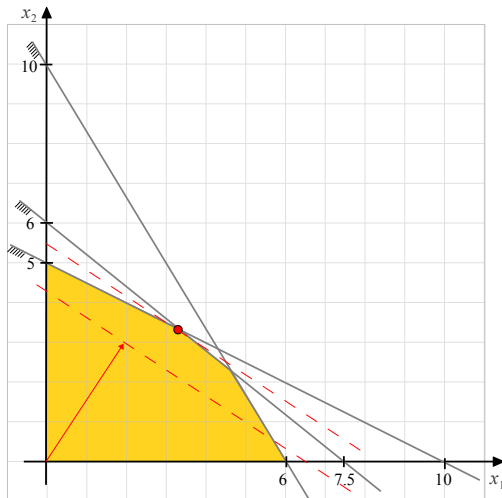
$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

Determine uma solução ótima usando o método gráfico.

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

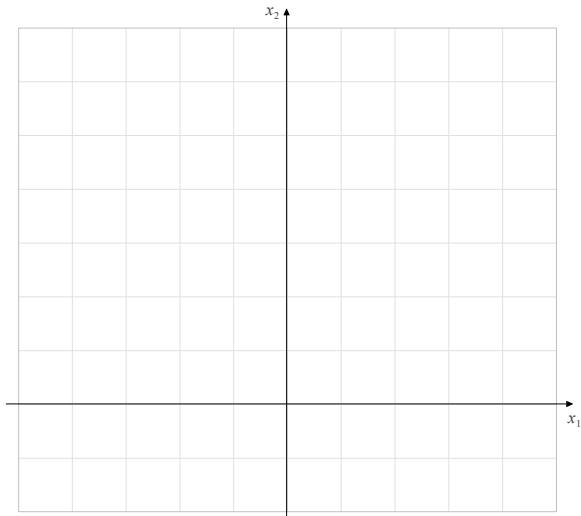
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

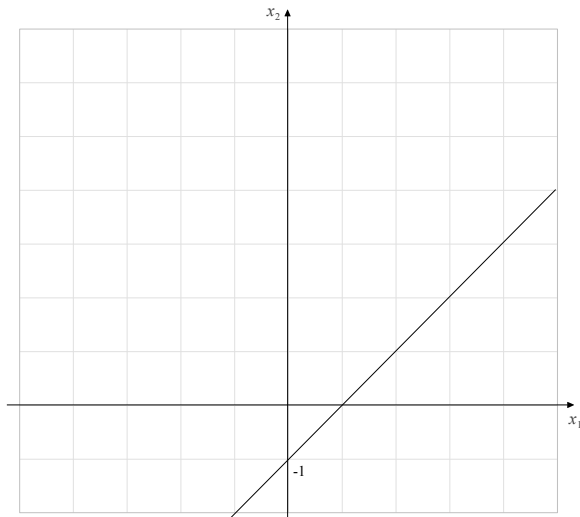
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

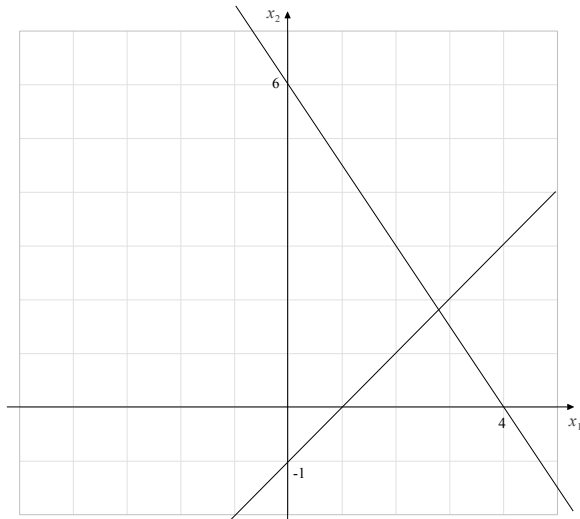
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

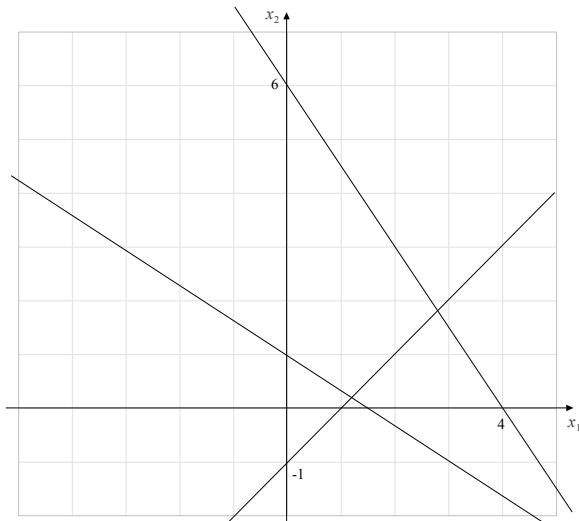
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

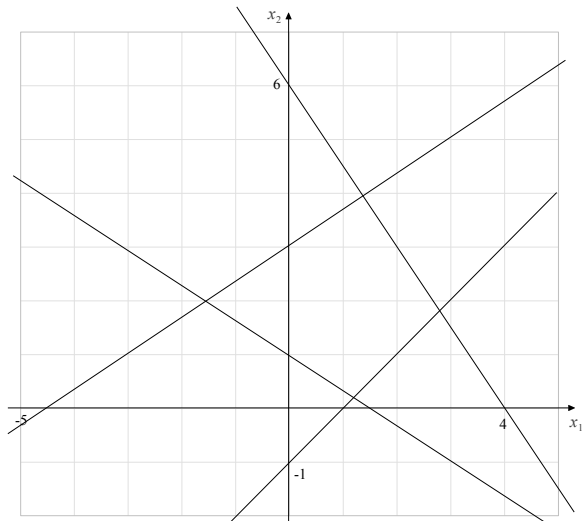
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

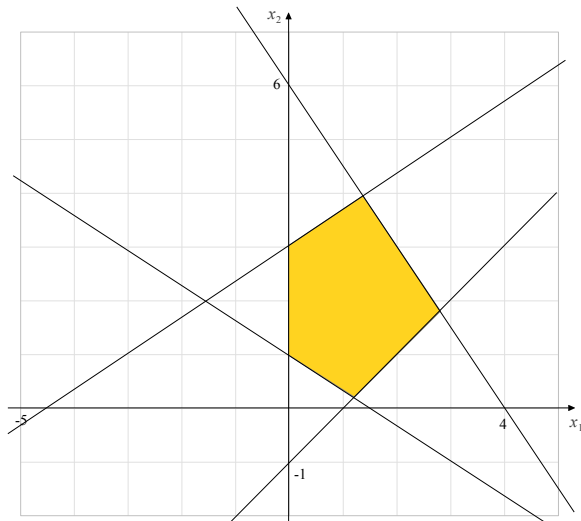
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

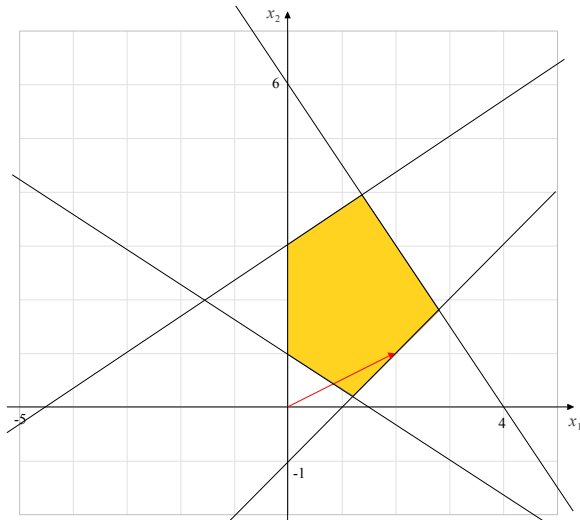
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

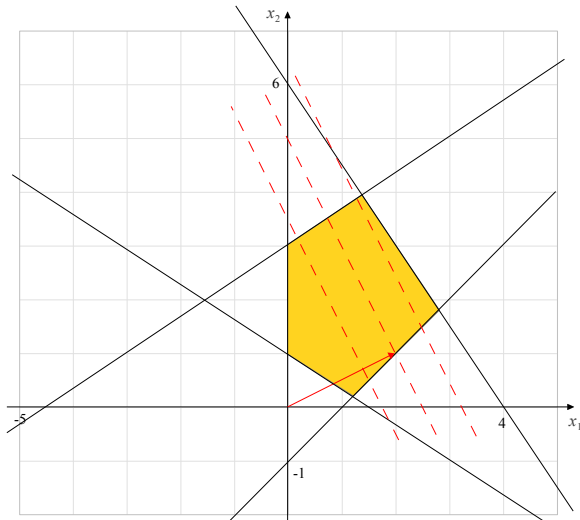
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

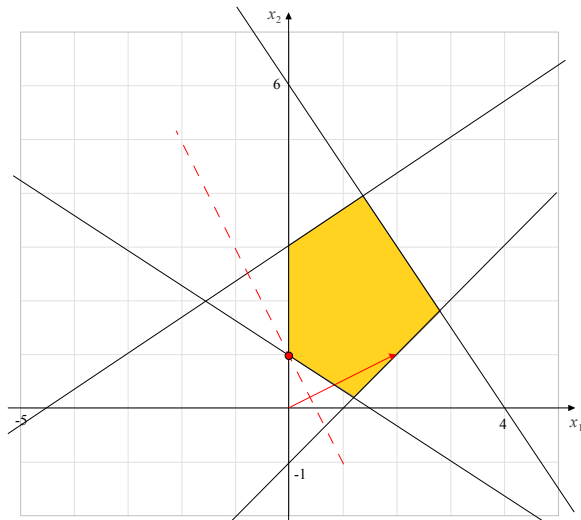
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Logo, temos a solução ótima $x^* = (0, 1)$ com valor ótimo $f(x^*) = 1$.

Programação linear

▷ Casos particulares

Programação linear

▷ Casos particulares

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Programação linear

▷ Casos particulares

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

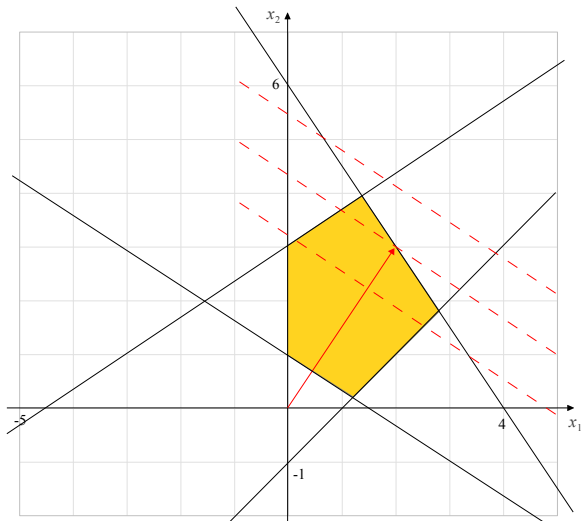
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

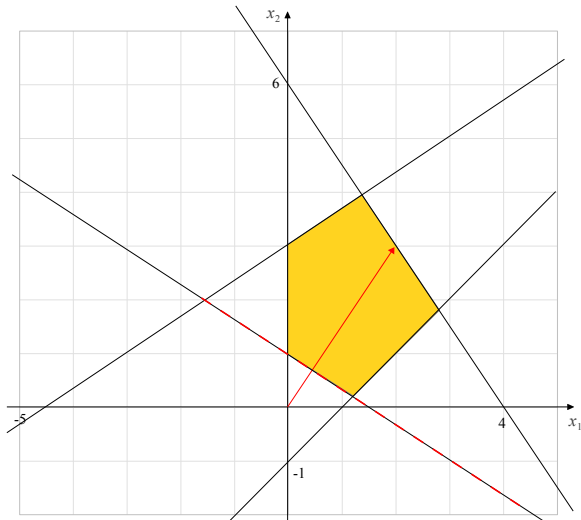
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

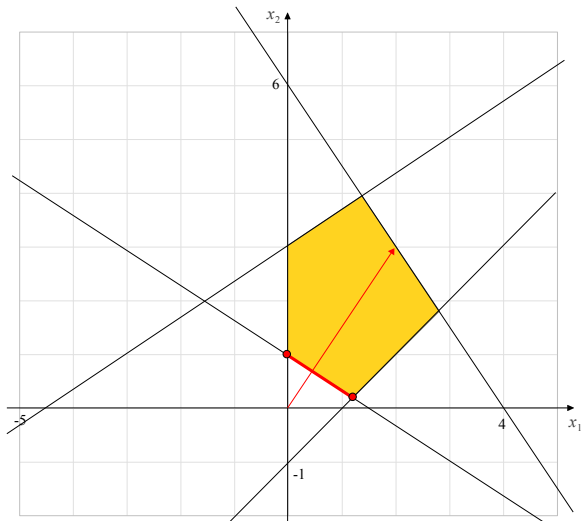
$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\min \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

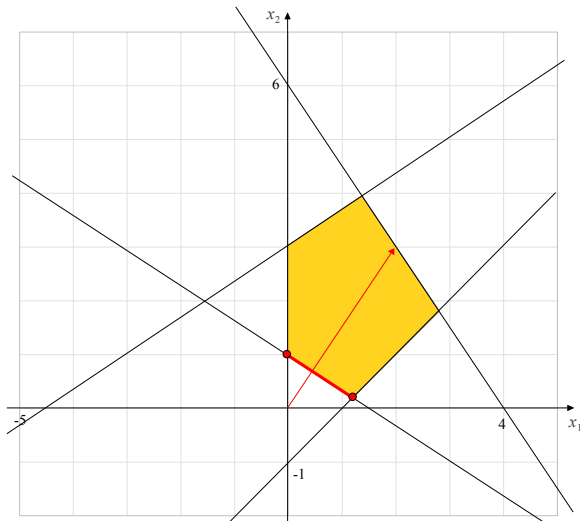
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

▷ Múltiplas soluções ótimas



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\text{max} \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Programação linear

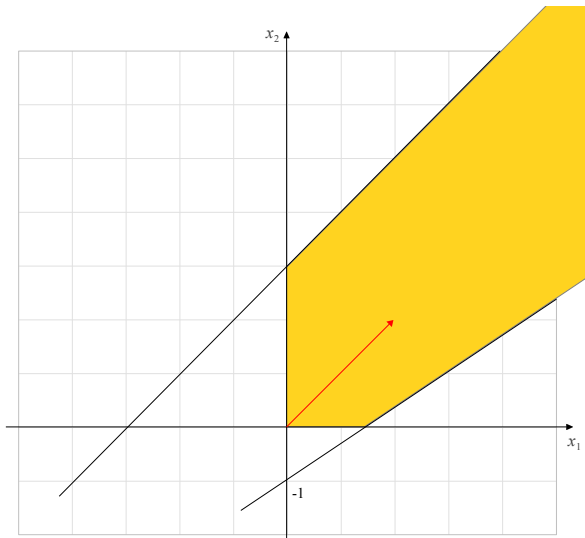
▷ Casos particulares

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

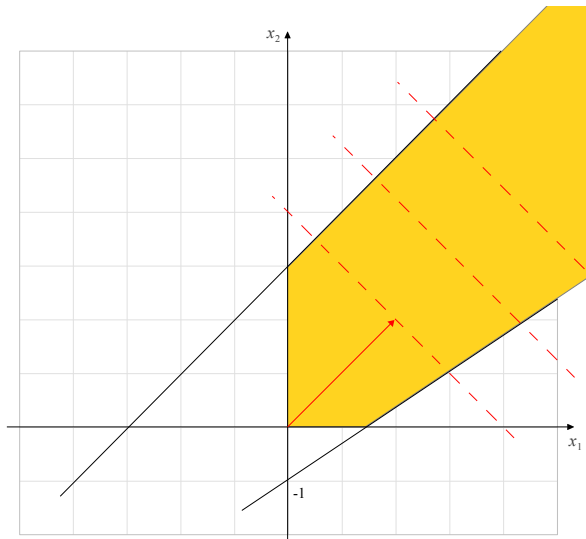
$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



▷ Casos particulares

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Programação linear

▷ Casos particulares

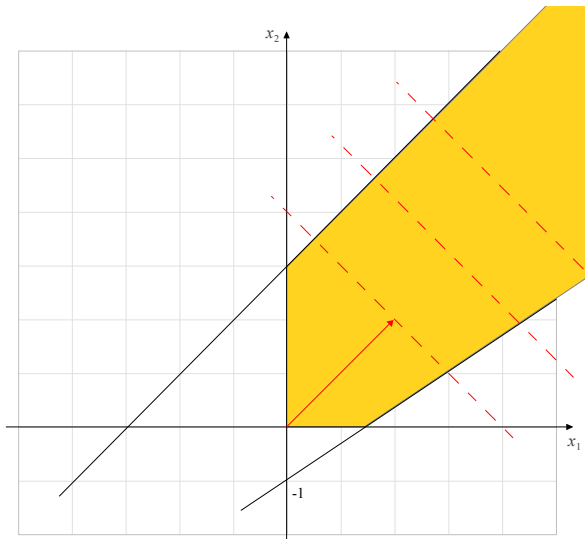
$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

▷ Problema ilimitado



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Programação linear

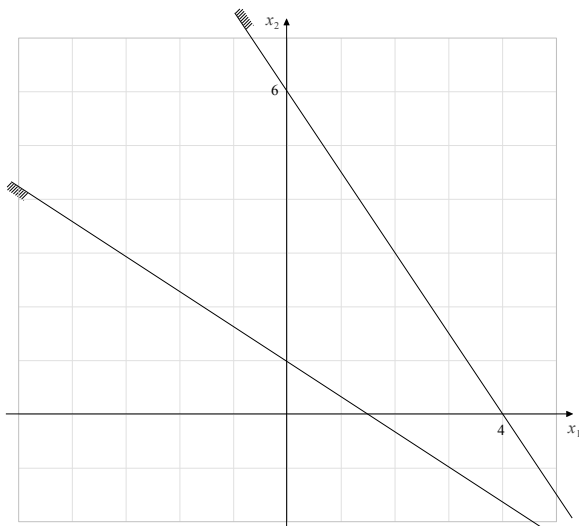
▷ Casos particulares

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



Programação linear

► Casos particulares

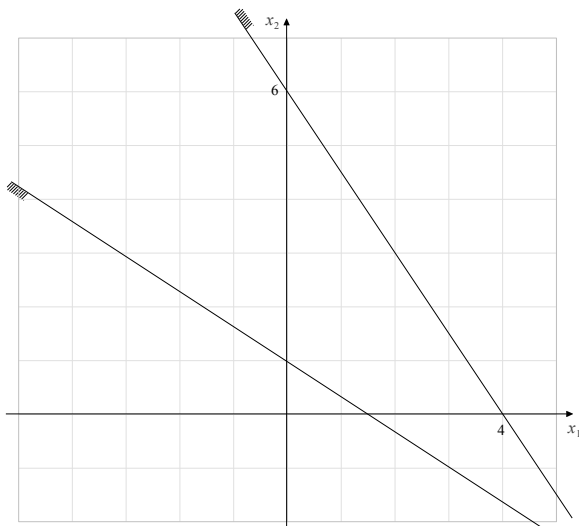
$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

► Problema infactível



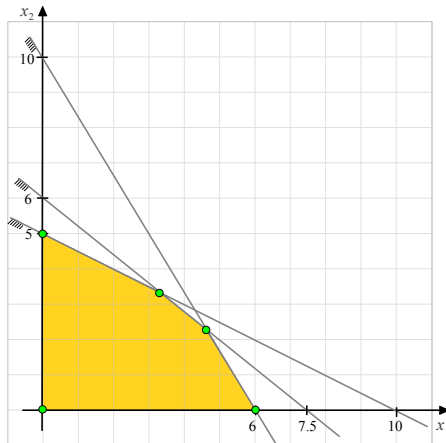
Programação linear

▷ Pontos extremos

Programação linear

▷ Pontos extremos

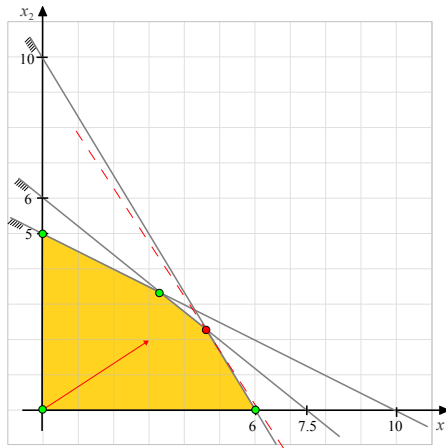
- Nos gráficos vistos, um ponto extremo é todo ponto na fronteira da região factível que é determinado pelo cruzamento de pelo menos duas retas.



Programação linear

▷ Pontos extremos

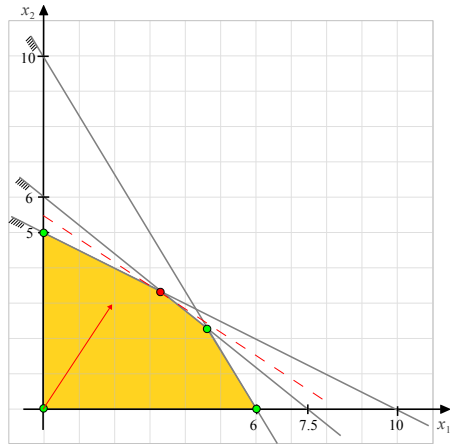
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.



Programação linear

▷ Pontos extremos

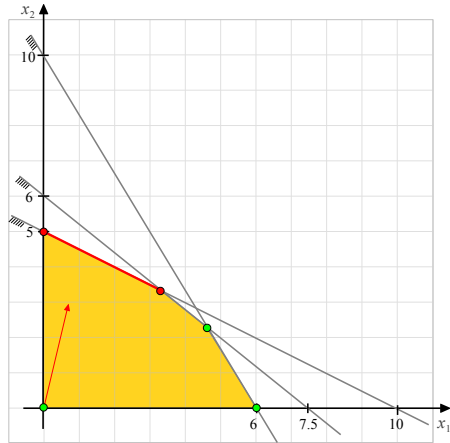
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.



Programação linear

▷ Pontos extremos

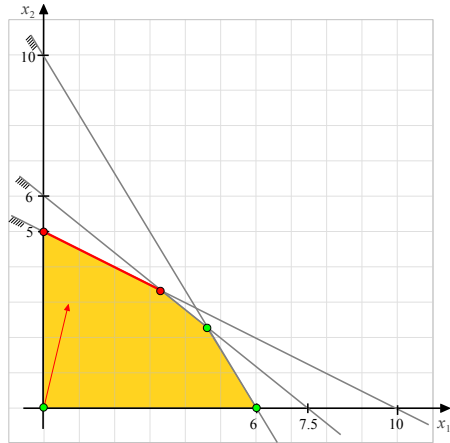
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo;



Programação linear

▷ Pontos extremos

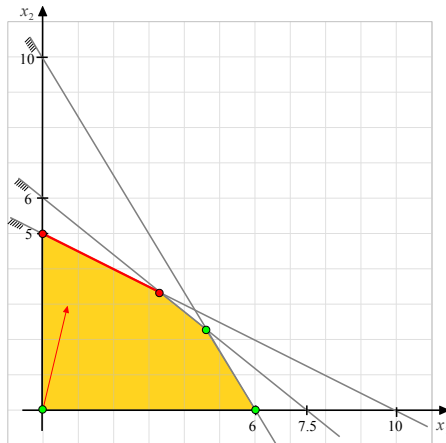
- ▶ A toda solução ótima está associado um ponto extremo;
- ▶ Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo;



Programação linear

► Pontos extremos

- A toda solução ótima está associado um ponto extremo;
- Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo;
- Essa é uma observação fundamental em Programação Linear.



- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?