



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2025
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.2: Introdução à Otimização e Programação Linear

Objetivos deste tópico

- ▶ Estudar os conceitos básicos de otimização e suas aplicações;
- ▶ Compreender o que é um modelo de otimização e como modelar um problema usando a otimização;
- ▶ Conhecer a programação linear, seus conceitos básicos e alguns modelos clássicos.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ x : variável de decisão;

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ x : variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{c} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ x : variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ▶ $\mathcal{X}$: conjunto factível (domínio, restrições);
Contém todas as *alternativas* viáveis.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

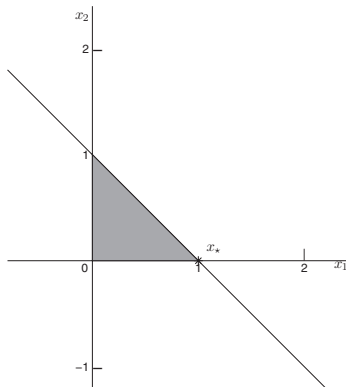
$$\begin{array}{c} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ x : variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ▶ $\mathcal{X}$: conjunto factível (domínio, restrições);
Contém todas as *alternativas* viáveis.
- ▶ $f(x)$: função objetivo; determina o *critério* de escolha.

Otimização

▷ Exemplos

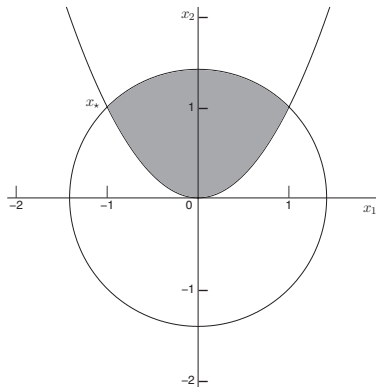
$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$



Otimização

▷ Exemplos

$$\begin{array}{ll}\min & f(x_1, x_2) = x_1 \\ \text{s.a} & x_1^2 \leq x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 2.\end{array}$$



Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$,

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, então o problema é *ilimitado*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}. \\ \text{(maximizar)} \end{array}$$

- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- ▶ Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- ▶ Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, então o problema é *ilimitado*. Em ambos os caso, *não* existe solução ótima.

Otimização

▷ Classificação

Os modelos de otimização podem ser classificados como:

- ▶ lineares ou não-lineares;
- ▶ contínuos ou discretos;
- ▶ determinísticos ou estocásticos.

Modelo de otimização linear x não-linear

- Um modelo linear é descrito por meio de funções, equações e inequações lineares;

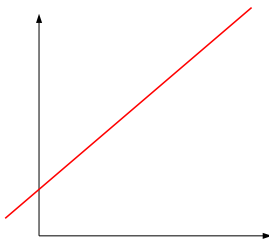
Modelo de otimização linear x não-linear

- ▶ Um modelo linear é descrito por meio de funções, equações e inequações lineares;
- ▶ Funções lineares são aquelas que variam de forma constante. Podem envolver apenas a soma de variáveis e a multiplicação de variáveis por constantes.

Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções lineares

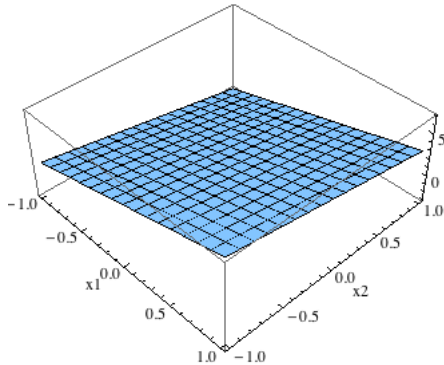
$$f(x) = bx + c$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções lineares

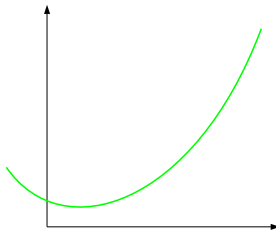
$$f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 + 2$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

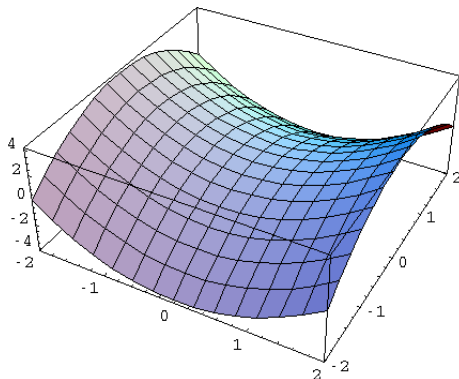
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

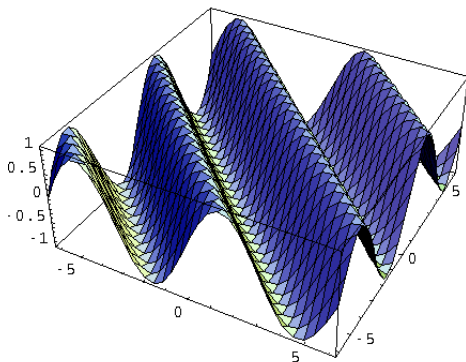
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

- Um modelo é contínuo quando seu conjunto factível contém todos os pontos interiores à sua fronteira;

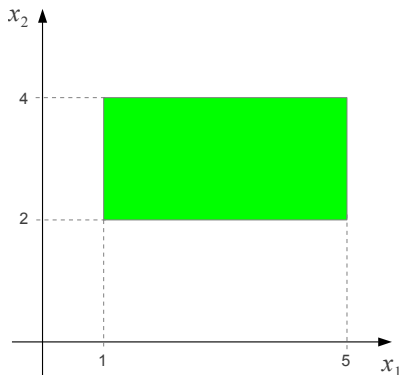
Modelo de otimização contínuo x discreto

- ▶ Um modelo é contínuo quando seu conjunto factível contém todos os pontos interiores à sua fronteira;
- ▶ Em um conjunto factível discreto, os pontos factíveis são isolados no conjunto.

Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio contínuo

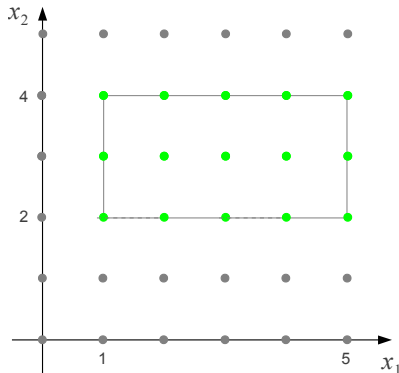
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio discreto

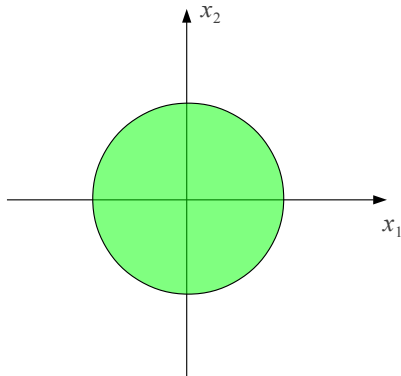
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio contínuo

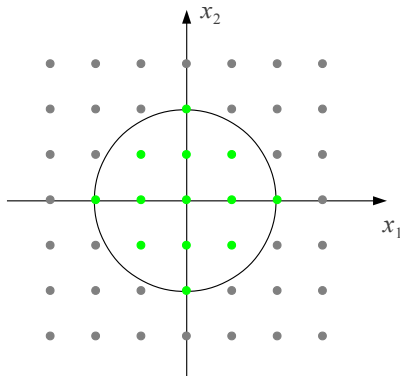
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio discreto

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Modelo de otimização determinístico x estocástico

- Um modelo é determinístico quando os dados de entrada são conhecidos com certeza. Por exemplo: a demanda de um dado produto para os três próximos meses é 170, 185 e 147 unidades;

Modelo de otimização determinístico x estocástico

- ▶ Um modelo é determinístico quando os dados de entrada são conhecidos com certeza. Por exemplo: a demanda de um dado produto para os três próximos meses é 170, 185 e 147 unidades;
- ▶ Em um modelo estocástico, há incerteza quanto aos dados de entrada. A demanda para os próximos meses não é conhecida, mas são conhecidos possíveis cenários e suas probabilidades de ocorrência.

Otimização

▷ Nomenclatura

- ▶ Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- ▶ Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;
- ▶ Programação Estocástica: modelo linear contínuo estocástico;
- ▶ Programação Não-linear: modelo não-linear contínuo determinístico;
- ▶ ...

Otimização

▷ Métodos de solução

- ▶ Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.

Otimização

▷ Métodos de solução

- ▶ Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- ▶ Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.

Otimização

▷ Métodos de solução

- ▶ Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- ▶ Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.
- ▶ Para modelos de otimização discreta, temos o método branch-and-bound;

Otimização

▷ Métodos de solução

- ▶ Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- ▶ Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.
- ▶ Para modelos de otimização discreta, temos o método branch-and-bound;
- ▶ Alguns modelos possuem uma estrutura especial que pode ser explorada por técnicas de reformulação (Dantzig-Wolfe, Lagrangiana, Benders).

Programação Linear

▷ Modelo

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

Programação Linear

▷ Modelo

$$\begin{array}{ll}\text{minimizar} & f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0\end{array}$$

Parâmetros: dados de entrada (números)

Programação Linear

▷ Modelo

$$\text{minimizar } f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

$$\text{sujeito a } 1x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 15$$

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 9$$

$$12x_1 + 9x_2 + 1x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ Modelo de otimização linear contínuo determinístico.

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- ▶ Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- ▶ Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

- ▶ sujeita a um domínio contínuo, representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, p.ex.:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- ▶ Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

- ▶ sujeita a um domínio contínuo, representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, p.ex.:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

- ▶ Obs.: não é permitido usar ' $<$ ' nem ' $>$ '.

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- ▶ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- ▶ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- ▶ $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- ▶ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- ▶ $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema
- ▶ $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: coeficientes do vetor de recursos

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- ▶ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- ▶ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- ▶ $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema
- ▶ $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: coeficientes do vetor de recursos
- ▶ $a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: coeficientes da matriz de recursos

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- ▶ **Proporcionalidade:** A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- ▶ **Proporcionalidade:** A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- ▶ **Aditividade:** A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- ▶ **Proporcionalidade:** A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- ▶ **Aditividade:** A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)
- ▶ **Fracionamento:** As variáveis podem assumir valores fracionários;

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

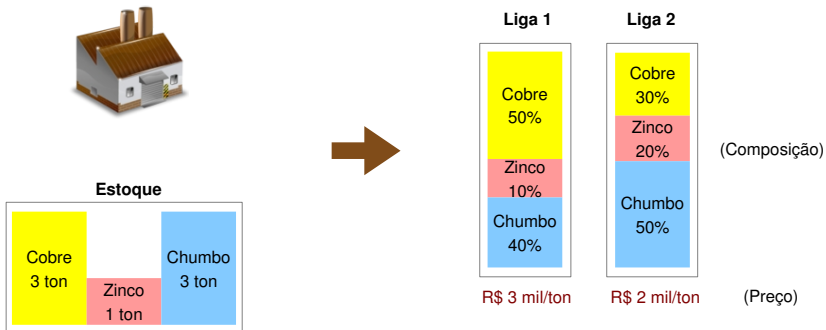
- ▶ **Proporcionalidade:** A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- ▶ **Aditividade:** A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)
- ▶ **Fracionamento:** As variáveis podem assumir valores fracionários;
- ▶ **Certeza:** Todos os dados são determinísticos.

Exemplo

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

Exemplo



Exemplo

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão?

Exemplo

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

Exemplo

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

- ▶ Restrições?

Exemplo

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

- ▶ Restrições?

Estoque de cobre:

Exemplo

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

- ▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco:

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo:

Exemplo

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

► Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

Exemplo

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

► Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

Quantidades não-negativas:

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

▶ Função objetivo?

Exemplo

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i , para $i = 1, 2$.

▶ Restrições?

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

▶ Função objetivo?

Maximizar $3x_1 + 2x_2$

Exemplo

▷ Modelagem

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Problemas de mix de produção

▷ Exemplo

Uma fábrica produz utensílios domésticos feitos de metal. São feitos 3 produtos por meio de 3 operações (estamparia, perfuração e montagem), sendo que cada operação possui um limite máximo de horas disponíveis. A fabricação dos produtos 2 e 3 consome um material que está disponível em quantidades limitadas em estoque. A disponibilidade do material e de horas em cada operação, bem como o quanto cada unidade produzida consome desses recursos são descritos na seguinte tabela:

Setor	Taxa de produção (horas por unidade)			Recurso disponível
	Produto 1	Produto 2	Produto 3	
Estamparia	0,03	0,15	0,10	400 h
Perfuração	0,06	0,12	0,10	400 h
Montagem	0,05	0,10	0,12	500 h
Material	—	2,0	1,2	2000 m^2

Problemas de mix de produção

▷ Exemplo

A fábrica fez um levantamento de qual o custo unitário e o preço de venda adequado para cada produto, bem como uma estimativa para o mínimo e máximo de vendas, sendo:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Preço unitário	10	25	20
Custo unitário	6	15	14
Mínimo vendas	1000	—	100
Máximo vendas	6000	500	1000

Deseja-se determinar quanto fabricar de cada produto, de modo a maximizar o lucro.

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

► Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material: $2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material: $2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$

Quantidades mínimas e máximas:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material: $2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$

Quantidades mínimas e máximas:

$1000 \leq x_1 \leq 6000, 0 \leq x_2 \leq 500, 100 \leq x_3 \leq 1000$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material: $2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$

Quantidades mínimas e máximas:

$1000 \leq x_1 \leq 6000, 0 \leq x_2 \leq 500, 100 \leq x_3 \leq 1000$

▶ Função objetivo?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

▶ Variáveis de decisão?

$x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i , para $i = 1, 2, 3$.

▶ Restrições?

Estamparia: $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Perfuração: $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$

Montagem: $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$

Material: $2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$

Quantidades mínimas e máximas:

$1000 \leq x_1 \leq 6000, 0 \leq x_2 \leq 500, 100 \leq x_3 \leq 1000$

▶ Função objetivo?

Maximizar $4x_1 + 10x_2 + 6x_3$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

$$\max \quad f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$$

$$0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$$

$$0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$$

$$2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$$

$$1000 \leq x_1 \leq 6000$$

$$0 \leq x_2 \leq 500$$

$$100 \leq x_3 \leq 1000$$

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;
- ▶ Restrições:

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;
- ▶ Restrições:
 - ▶ limitações de recursos;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;
- ▶ Restrições:
 - ▶ limitações de recursos;
 - ▶ previsão de demanda mínima e máxima.

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;
- ▶ Restrições:
 - ▶ limitações de recursos;
 - ▶ previsão de demanda mínima e máxima.
- ▶ Objetivo:

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- ▶ Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período.
Determinar **quanto** produzir de cada produto;
- ▶ Múltiplos produtos, um período;
- ▶ Restrições:
 - ▶ limitações de recursos;
 - ▶ previsão de demanda mínima e máxima.
- ▶ Objetivo:
 - ▶ maximizar o lucro.

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;
- ▶ r_i : retorno do produto i ;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;
- ▶ r_i : retorno do produto i ;
- ▶ c_i : custo unitário do produto i ;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;
- ▶ r_i : retorno do produto i ;
- ▶ c_i : custo unitário do produto i ;
- ▶ b_k : qtd do recurso k ;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;
- ▶ r_i : retorno do produto i ;
- ▶ c_i : custo unitário do produto i ;
- ▶ b_k : qtd do recurso k ;
- ▶ a_{ki} : qtd do recurso k para produzir 1 unidade do produto i ;

Problemas de mix de produção

► Modelagem

► Parâmetros:

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \dots, K\}$;
- r_i : retorno do produto i ;
- c_i : custo unitário do produto i ;
- b_k : qtd do recurso k ;
- a_{ki} : qtd do recurso k para produzir 1 unidade do produto i ;
- L_i, U_i : demandas mínima e máxima do produto i .

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_i :

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

▶ Restrições:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

▶ Restrições:

Limitação do recurso k :

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

- ▶ Restrições:

Limitação do recurso k :
$$\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k,$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

- ▶ Restrições:

Limitação do recurso k :
$$\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, \quad k = 1, \dots, K;$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

► Restrições:

Limitação do recurso k : $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, k = 1, \dots, K;$

Demanda do produto i :

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

▶ Restrições:

Limitação do recurso k : $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, k = 1, \dots, K;$

Demanda do produto i : $L_i \leq x_i \leq U_i,$

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

▶ Restrições:

Limitação do recurso k : $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, k = 1, \dots, K;$

Demanda do produto i : $L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1, \dots, n.$

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

- ▶ Restrições:

Limitação do recurso k : $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, k = 1, \dots, K;$

Demanda do produto i : $L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1, \dots, n.$

- ▶ Função objetivo:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_i : qtd a ser produzida do produto i .

► Restrições:

Limitação do recurso k : $\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, k = 1, \dots, K;$

Demanda do produto i : $L_i \leq x_i \leq U_i, i = 1, \dots, n.$

► Função objetivo:

Maximizar o lucro: $\max \sum_{i=1}^n (r_i - c_i)x_i.$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo algébrico

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i=1}^n (r_i - c_i)x_i \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i \leq b_k, \quad k = 1, \dots, K, \\
 & L_i \leq x_i \leq U_i, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo algébrico (usando conjuntos)

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in \mathcal{P}} (r_i - c_i) x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{ki} x_i \leq b_k, \quad k \in \mathcal{R}, \\ & L_i \leq x_i \leq U_i, \quad i \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

$$\max \quad f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3$$

$$\text{s.a} \quad 0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,10x_3 \leq 400$$

$$0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,10x_3 \leq 400$$

$$0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 \leq 500$$

$$2,0x_2 + 1,2x_3 \leq 2000$$

$$1000 \leq x_1 \leq 6000$$

$$0 \leq x_2 \leq 500$$

$$100 \leq x_3 \leq 1000$$

Problemas de mistura (*blending*)



INFORMAÇÃO NUTRICIONAL/INFORMACIÓN NUTRICIONAL
Porção de 20g (1 unidade/unidad)

Quantidade por porção/ Cantidad por porción		%VD**
Valor energético	64 kcal=269 kJ	3%
Carboidratos/Carbohidratos	11 g	4%
Proteínas	1,4 g	2%
Gorduras totais/Grasas totales	1,5 g	3%
Gorduras saturadas/Grasas saturadas	0,6 g	3%
Gorduras trans/Grasas trans	não contém/ no contiene	**
Gorduras monoinsaturadas/ Grasas monoinsaturadas	0,4 g	**
Gorduras poli-insaturadas/ Grasas poliinsaturadas	0,2 g	**
Coolesterol	0 mg	0%
Fibra alimentar/Fibra alimentaria	4,4 g	18%
Sódio/Sodio	27 mg	1%

*% Valores diários de referência com base em uma dieta de 2.000 kcal ou 8.400 kJ. Seus valores diários podem ser maiores ou menores dependendo de suas necessidades energéticas. ** VD não estabelecido.

*% Valores diarios de referencia con base a una dieta de 2.000 kcal u 8.400 kJ. Sus valores diarios pueden ser mayores o menores dependiendo de sus necesidades energéticas. ** VD no establecido.

FAZ BEM SABER

Serviço Nestlé ao Consumidor
0800-7702457 SMS: 25770
CAIXA POSTAL 21144
CEP 04602-970
SÃO PAULO - SP
FALECOM@NESTLE.COM.BR
WWW.NESTLE.COM.BR

Uma Dica Nestlé

Cereal integral é muito mais do que fibra! Além da fibra, o cereal integral conserva todas as partes do grão e seus nutrientes. Inclua no seu dia a dia alimentos com cereais integrais para uma alimentação mais equilibrada.

NUTRITIONAL COMPASS®
 © Marca Registrada de Société des Produits Nestlé S.A.

**12152255
4338569**

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Exemplo

Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham certas quantidades mínimas e máximas de certos nutrientes principais, sendo: no mínimo 22% de fibra e 7% de proteína; e no máximo 55% de carboidrato e 8% de gorduras. Para produzir as barras, a indústria usará como ingredientes, farinha de cereais, mel, soja e banana. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir:

Nutrientes	Ingredientes				Barra
	Cereais	Mel	Soja	Banana	
Fibra	0,26	0,01	0,25	0,10	0,22
Proteína	0,05	0,05	0,26	0,02	0,07
Carboidrato	0,60	0,75	0,45	0,24	0,55
Gorduras	0,07	–	0,01	0,01	0,08
Custos (R\$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- ▶ Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- ▶ Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- ▶ Restrições:

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- ▶ Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- ▶ Restrições:
 - ▶ Garantir as especificações do produto.

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- ▶ Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- ▶ Restrições:
 - ▶ Garantir as especificações do produto.
- ▶ Objetivos:

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- ▶ Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- ▶ Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- ▶ Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- ▶ Restrições:
 - ▶ Garantir as especificações do produto.
- ▶ Objetivos:
 - ▶ Minimizar o custo de produzir uma dada quantidade da mistura.

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$;
- ▶ c_i : custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$;
- ▶ c_i : custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
- ▶ a_{ji} : qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ em 1 unid do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Parâmetros:

- ▶ Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$;
- ▶ Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$;
- ▶ c_i : custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
- ▶ a_{ji} : qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ em 1 unid do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
- ▶ b_j : qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ exigida na mistura;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- ▶ Variáveis de decisão:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

► Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$,

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Não-negatividade:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Não-negatividade: $x_i \geq 0, i \in \mathcal{I}.$

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Não-negatividade: $x_i \geq 0, i \in \mathcal{I}.$

▶ Função objetivo:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Não-negatividade: $x_i \geq 0, i \in \mathcal{I}.$

▶ Função objetivo:

Minimizar o custo:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

▶ Variáveis de decisão:

x_i : qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

▶ Restrições:

Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, j \in \mathcal{J};$

Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1;$

Não-negatividade: $x_i \geq 0, i \in \mathcal{I}.$

▶ Função objetivo:

Minimizar o custo: $\min \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i x_i.$

Problemas de mistura

▷ Modelo algébrico

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_j, \quad j \in \mathcal{J}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1. \\ & x_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Problemas de mistura

▷ Modelo com dados

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 5.2x_1 + 6.8x_2 + 7.1x_3 + 2.5x_4 \\ \text{s.a} \quad & 0,26x_1 + 0,01x_2 + 0,25x_3 + 0,10x_4 \geq 0,22 \\ & 0,05x_1 + 0,05x_2 + 0,26x_3 + 0,02x_4 \geq 0,07 \\ & 0,60x_1 + 0,75x_2 + 0,45x_3 + 0,24x_4 \leq 0,55 \\ & 0,07x_1 + 0,01x_3 + 0,01x_4 \leq 0,08 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Problemas de mistura

▷ Modelo com dados

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 5.2x_1 + 6.8x_2 + 7.1x_3 + 2.5x_4 \\ \text{s.a} \quad & 0,26x_1 + 0,01x_2 + 0,25x_3 + 0,10x_4 \geq 0,22 \\ & 0,05x_1 + 0,05x_2 + 0,26x_3 + 0,02x_4 \geq 0,07 \\ & 0,60x_1 + 0,75x_2 + 0,45x_3 + 0,24x_4 \leq 0,55 \\ & 0,07x_1 + 0,01x_3 + 0,01x_4 \leq 0,08 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

E se quiséssemos produzir Q kg da mistura?

Problemas de transporte

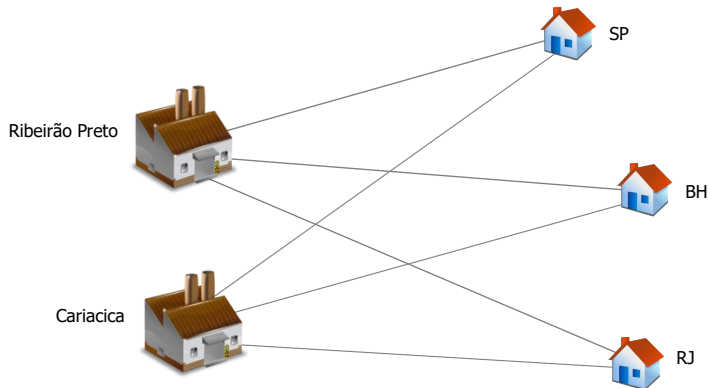
Uma fabricante de bebidas possui dois centros de produção: um em Ribeirão Preto-SP e outro em Cariacica-ES. A empresa deseja planejar qual a melhor forma de atender a demanda para a próxima semana, de mercados consumidores em três capitais: São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro. O custo unitário de se transportar 1 fardo de bebida de cada centro de produção a cada mercado consumidor é dado na tabela a seguir, juntamente com as demandas de cada mercado e as quantidades disponíveis em cada centro de produção:

Custos (R\$/unid)	SP	BH	RJ	Disponível
Ribeirão Preto	3,70	4,30	6,10	1100 unid
Cariacica	9,80	6,90	2,10	1800 unid
Demanda (unid)	960	510	895	

A empresa deseja determinar como atender a demanda de cada mercado consumidor, minimizando os gastos totais com transporte.

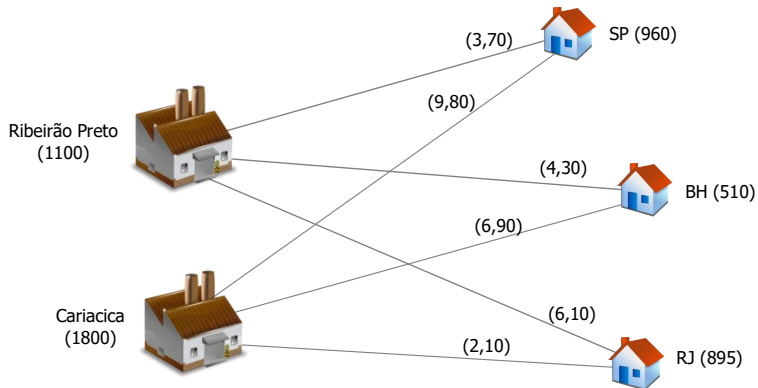
Problemas de transporte

► Ilustração



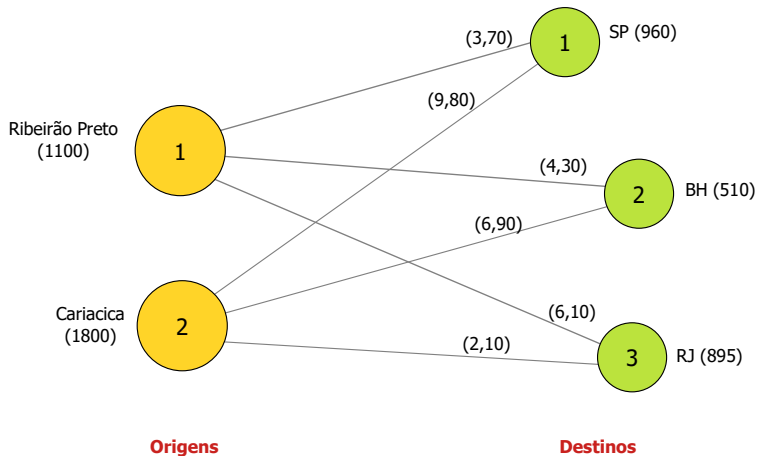
Problemas de transporte

► Ilustração



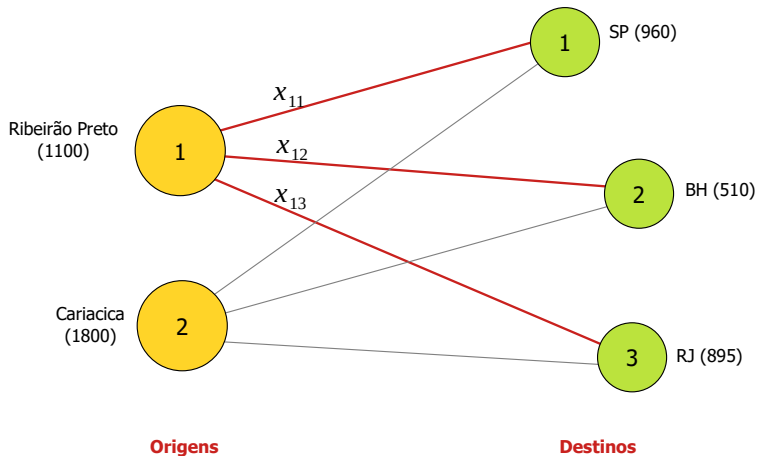
Problemas de transporte

► Ilustração



Problemas de transporte

► Ilustração



Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- ▶ Não-negatividade:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- ▶ Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- ▶ Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

- ▶ Minimizar custos:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- ▶ x_{ij} : qtd a ser transportada da origem i até o destino j , com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- ▶ Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- ▶ Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- ▶ Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- ▶ Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- ▶ Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- ▶ Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

- ▶ Minimizar custos:

$$\min 3,7x_{11} + 4,3x_{12} + 6,1x_{13} + 9,8x_{21} + 6,9x_{22} + 2,1x_{23}$$

Problemas de transporte

▷ Modelo

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 3,7x_{11} + 4,3x_{12} + 6,1x_{13} \\ & + 9,8x_{21} + 6,9x_{22} + 2,1x_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800 \\ & x_{11} + x_{21} = 960 \\ & x_{12} + x_{22} = 510 \\ & x_{13} + x_{23} = 895 \\ & x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \geq 0. \end{aligned}$$

Problemas de transporte

▷ Modelo algébrico

$$\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

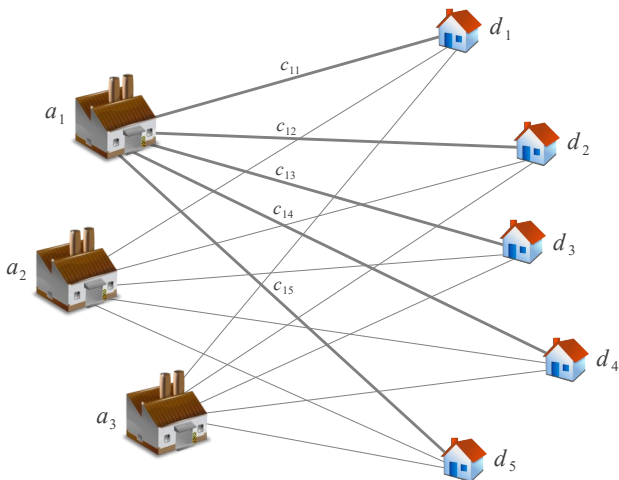
$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Problemas de transporte

▷ Ilustração: parâmetros



- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?