

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGE
Otimização Linear Contínua e Discreta (01/2025)
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Avaliação escrita

Nome: _____

1. Considere o Teorema das Folgas Complementares, conforme visto em aula.

- (a) Enuncie o Teorema, explique sua importância e descreva como as condições KKT para um problema de programação linear na forma padrão podem ser obtidas a partir dele; [0,5]
- (b) Explique como os seguintes métodos podem ser derivados a partir das condições KKT: método primal simplex, método dual simplex e método primal-dual de pontos interiores; [0,5]
- (c) Usando o Teorema, determine uma solução ótima para o problema dual do problema de programação linear a seguir, o qual possui $x^* = (1, 0, 1)$ como uma solução ótima. [0,5]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Considere o problema de programação linear a seguir. Determine o problema dual usando *teoria lagrangiana*, explicando passo-a-passo (**não** use a tabela de conversão primal-dual nem coloque-o na forma padrão). [1,5]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = 0,3x_1 - 0,9x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 = 800 \\ & 0,21x_1 + 0,30x_2 \leq 0 \\ & 0,03x_1 + 0,01x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

3. Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham no mínimo 21% de Fibra e no máximo 41% de Gorduras. Para produzir as barras, a fábrica usará como ingredientes: Farinha de Cereais, Arroz, Soja e Maça. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir.

Nutrientes	Ingredientes				Barra
	Cereais	Arroz	Soja	Maça	
Fibra	26%	1%	25%	10%	$\geq 21\%$
Gorduras	60%	75%	45%	24%	$\leq 41\%$
Custos (R\$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar qual a quantidade ideal de cada ingrediente na mistura, de modo a produzir **10 kg** da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

- (a) Proponha um modelo de programação linear para auxiliar na tomada de decisão; [0,5]
- (b) Resolva o modelo proposto no item (a) usando um dos métodos de programação linear vistos em aula (método primal simplex, método dual simplex ou método primal-dual de pontos interiores). Você poderá usar o Octave/Matlab para auxiliar nos cálculos, mas os resultados de cada cálculo deverão estar na folha de respostas. Justifique cada passo de sua resolução. [1,5]
- (c) A partir da iteração ótima do método usado no item (c), crie uma tabela de Análise de Sensibilidade para mudanças nos *coeficientes da função objetivo*, similar a que é gerada pelos solvers, incluindo: Valor Final, Custo Reduzido, Permitido Aumentar e Permitido Reduzir. Apresente os cálculos detalhados para obtenção dessa tabela. [1,0]
- (d) Faça uma discussão detalhada sobre a Análise de Sensibilidade usando os dados da tabela do item anterior. [1,0]
- (e) A empresa estuda incluir Banana como um novo ingrediente na barra de cereal. Sabe-se que esse ingrediente possui 10% de Fibra e 18% de Gorduras. Usando somente Análise de Sensibilidade, determine qual deve ser o custo máximo da Banana, para que compense usá-la na mistura. [1,0]

4. Responda às perguntas a seguir, **justificando**.

- (a) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui solução ótima, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui solução ótima? [0,25]
- (b) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que o problema também é infactível? [0,25]
- (c) Se um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que sua relaxação linear também é infactível? [0,25]
- (d) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui infinitas soluções ótimas, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui infinitas soluções ótimas? [0,25]
- (e) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é ilimitada, podemos afirmar que o problema de programação inteira também é ilimitado? [0,25]
- (f) Ao aplicar o método *branch-and-bound* a um problema de minimização, como obtemos limitantes inferiores e superiores? [0,25]

- (g) O que significa dizer que um problema é da classe $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$, $\mathcal{NP}$ -difícil e $\mathcal{NP}$ -completo? [0,5]
- (h) Como podemos provar que um problema é $\mathcal{NP}$ -difícil? Cite exemplos de problemas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$ -difíceis no contexto da Engenharia de Produção. [0,5]

5. Considere o problema do Exercício 3. O gerente da fábrica ficou insatisfeito com a solução apresentada por você, pois de acordo com ele “*as quantidades de ingredientes estão com valores muito quebrados, dificultando a produção na prática*”. Assim, ele pediu uma solução com apenas quantidades inteiras dos ingredientes. Use o método *branch-and-bound* para determinar uma solução inteira ótima para o gerente, usando busca em profundidade e ramificação na variável mais fracionária. Você pode resolver as *relaxações lineares* da forma que achar melhor (inclusive por um *software* de otimização), mas apresente todas as soluções e valores ótimos obtidos. Explique detalhadamente a aplicação do algoritmo (passo-a-passo), apresente todos os cálculos e justifique cada passo. [1,5]

Algumas informações que podem ajudar

$$x_B = B^{-1}b, \quad p^T = c_B^T B^{-1};$$

$$s_j = c_j - p^T a_j; \quad y = B^{-1}a_k;$$

$$\frac{x_{B_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\}$$

$$\eta^T = e_l B^{-1}$$

$$\frac{\bar{s}_k}{-\eta^T a_k} = \min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$$

$$s_k + \delta \geq 0; \quad s_j - \delta [B^{-1}]_l a_j \geq 0$$

$$\bar{x}_B + B^{-1}(0, \dots, \delta, \dots, 0)^T \geq 0$$

$$\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T \bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma \bar{\mu}e \end{bmatrix}$$

$$\bar{\alpha} = \max \{ \alpha \mid (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \alpha(\Delta x, \Delta p, \Delta s) \in \mathcal{N}_* \}$$

```

s = c' - pt * A
xB = inv(B) * b
xB ./ y
pt = c(base)' * inv(B)
y = inv(B) * A(:,k)
B = A(:,base)
base(1) = k
mu = (x' * s) / n
X = diag(x)
S = diag(s)
J = [A zeros(m,m) zeros(m,n); zeros(n,n) A'
     eye(n); S zeros(n,m) X]
F = [A * x - b; A' * p + s - c; X * S * e -
     sigma * mu * e]
D = J * (-F)
Dx = D(1:n)
Dp = D(n+1:n+m)
Ds = D(n+m+1:2*n+m)
-x ./ Dx
-s ./ Ds

```