

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGE
Disciplina: Otimização Linear Contínua e Discreta
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Lista de exercícios - Semana 7

1. Um empresário está fazendo um planejamento para os próximos três anos. Ele tem disponível R\$ 25 milhões para investir anualmente e cinco projetos estão sob consideração. A tabela a seguir apresenta os retornos esperados para cada projeto ao final do terceiro ano e os desembolsos anuais.

Projeto	Desembolso (milhões R\$)			Retorno (milhões R\$)
	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30

Faça um modelo de programação inteira para determinar quais projetos o empresário deve selecionar, de modo a maximizar o retorno total. Resolva-o por um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima. Em seguida, elabore restrições para modelar as seguintes exigências (independentes): (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos; (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for; (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o 4 for; (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o 1 ou o 3 forem; (e) O projeto 5 deve ser selecionado se o 1 e o 3 forem.

2. Uma siderúrgica recebeu um pedido de 25 toneladas de aço. Carbono e Molibdênio devem ser responsáveis por pelo menos 5% e 4% do peso total, respectivamente. O aço pode ser produzido combinando-se três tipos de metal: lingotes de aço, aço de sucata e ligas de aço. Quatro lingotes estão disponíveis para compra. O peso, o custo por tonelada e a porcentagem de Carbono e de Molibdênio de cada lingote são dados na tabela a seguir:

Lingote	Qtd (ton)	Custo (R\$/ton)	Carbono (%)	Molibdênio (%)
1	5	150	5	3
2	3	138	4	3
3	4	115	5	4
4	6	75	3	4

A sucata pode ser comprada a R\$ 50 por tonelada e contém 3% de carbono e 9% de molibdênio. A tabela a seguir mostra os três tipos de ligas de aço que podem ser compradas (qualquer quantidade em toneladas está disponível).

Liga	Custo (R\$ por ton)	Carbono (%)	Molibdênio (%)
1	270	9	6
2	215	7	7
3	186	5	8

- (a) Elabore um modelo para minimizar o custo da siderúrgica em atender o pedido. Resolva-o por um software de otimização e descreva a solução ótima e o valor ótimo obtidos;
- (b) O fornecedor passou a exigir que os lingotes sejam comprados integralmente, mas pode-se usar apenas parte de seu peso total na mistura final. Por exemplo, caso o lingote 1 seja usado, deve-se comprar as 5 toneladas, mas a quantidade usada pode ser menor que 5. Modifique o modelo do item (a) para satisfazer a nova exigência, resolva-o por um software de otimização e apresente a nova solução ótima.
- (c) Modifique o modelo do item (b) para exigir o requisito mínimo de apenas um dos componentes, isto é, deve-se ter pelo menos 5% de carbono ou 4% de molibdênio. Qual a nova solução ótima?
3. Uma fábrica de alimentos possui 3 áreas disponíveis para a instalação de centros de distribuição para atender clientes da região metropolitana de 3 cidades. Devido aos tamanhos das áreas, os potenciais centros de distribuição têm capacidades máximas de armazenamento, conforme mostra a tabela a seguir juntamente com os custos unitários de transporte de cada centro até as cidades e as demandas de cada cidade. Os custos de instalação de centros de distribuição nas áreas 1, 2 e 3 são R\$ 12 mil, R\$ 15 mil e R\$ 11 mil, respectivamente. Elabore um modelo de programação inteira que determine quais áreas utilizar para a instalação dos centros e quais cidades cada centro deve atender, de modo a minimizar os custos totais. Resolva-o por um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima.

	Custo de transporte (R\$)			Demanda
	Área 1	Área 2	Área 3	
Ribeirão Preto	10	15	12	800
São Paulo	17	14	20	1400
S. J. Rio Preto	15	10	11	600
Capacidade	1200	1700	1600	

4. Responda às seguintes perguntas, **justificando**.
- (a) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui solução ótima, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui solução ótima?
- (b) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que o problema também é infactível?
- (c) Se um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que sua relaxação linear também é infactível?
- (d) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui infinitas soluções ótimas, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui infinitas soluções ótimas?
- (e) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é ilimitada, podemos afirmar que o problema de programação inteira também é ilimitado?
- (f) Ao aplicar o método *branch-and-bound* a um problema de minimização, como obtemos limites inferiores e superiores?

5. Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound* (busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária). Use o método gráfico para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18,5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

6. Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound* (busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária). Use um software de otimização para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 7x_2 \leq 44 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+\end{array}$$

7. Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound*, com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária, usando: (a) o método **primal** simplex para resolver as relaxações lineares em cada nó; (b) o método **dual** simplex para resolver as relaxações lineares em cada nó.

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & 4x_1 + 1x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.\end{array}$$

8. Considere o seguinte modelo de programação inteira:

$$\begin{array}{ll}\max & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+.\end{array}$$

- Determine uma solução ótima e o valor ótimo da relaxação linear deste modelo usando o método primal simplex passo-a-passo;
- Determine soluções inteiras para o modelo usando arredondamento. Comente sobre a factibilidade e otimalidade destas soluções;
- Determine uma solução ótima e o valor ótimo deste modelo usando o método *branch-and-bound* com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária. Use o método **primal** simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó;
- Determine uma solução ótima e o valor ótimo deste modelo usando o método *branch-and-bound* com busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária. Use o método **dual** simplex para resolver as relaxações lineares de cada nó.

9. Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribuiu uma utilidade (quanto maior, mais útil), mostrada na tabela abaixo juntamente com o peso de cada objeto. Cada objeto é único, podendo ser levado ou não. O peso máximo que o alpinista pode carregar na mochila é 5 kg.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Barra de cereal	6	200
Água	9	1000
Jaqueta	7	400
Tênis	3	400
Protetor solar	5	200
Garrafas de oxigênio	10	3000
Bússola	2	100
Máquina fotográfica	6	500

- (a) Elabore um modelo de programação inteira que auxilie o alpinista a decidir quais itens carregar de modo a maximizar a utilidade total da mochila;
- (b) Resolva o modelo proposto usando um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima.
- (c) Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo proposto usando o método *branch-and-bound* com busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária. Resolva a relaxação linear de cada um dos nós por **inspeção**.
10. Uma companhia de extração de petróleo tem disponível 6 bombas de submersão e deseja usá-las para aumentar a quantidade extraída de petróleo. A energia para alimentação das bombas é fornecida por um único gerador, cuja potência máxima é 2 kVA. A potência consumida e a eficiência de extração de cada bomba são apresentadas na tabela a seguir. Deseja-se determinar quais bombas devem ser usadas, de modo a maximizar a eficiência total da extração.

Bomba	1	2	3	4	5	6
Consumo (kVA)	0,2	1,0	0,4	0,4	0,2	0,9
Eficiência	5	9	7	3	5	10

- (a) Elabore um modelo de programação inteira para o problema.
- (b) Resolva o modelo do item anterior pelo método *branch-and-bound* com busca em **largura** e ramificação na variável mais fracionária, resolvendo as relaxações lineares por **inspeção**. Apresente os cálculos e justifique os passos detalhadamente.