

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGE
Disciplina: Otimização Linear Contínua e Discreta
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Lista de exercícios - Semana 5

1. Resolva os problemas a seguir pelo método **dual** simplex.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) min} & 3x_1 + 1x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 5x_2 \geq 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(b) min} & 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 2 \\ & -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

2. Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham certas quantidades mínimas e máximas de certos nutrientes principais, sendo: no mínimo 22% de Fibra e 7% de Proteína; e no máximo 55% de Carboidrato e 8% de Gorduras. Para produzir as barras, a fábrica usará como ingredientes: Farinha de Cereais, Mel, Soja e Banana. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir.

Nutrientes	Ingredientes				Barra
	Cereais	Mel	Soja	Banana	
Fibra	0,26	0,01	0,25	0,10	0,22
Proteína	0,05	0,05	0,26	0,02	0,07
Carboidrato	0,60	0,75	0,45	0,24	0,55
Gorduras	0,07	–	0,01	0,01	0,08
Custos (R\$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

- (a) Elabore um modelo de otimização para auxiliar na tomada de decisão da fábrica.
- (b) Escreva o problema dual do modelo elaborado no item (a).
- (c) Resolva o modelo do item (a) por um software de otimização e responda as questões a seguir usando **apenas** o Relatório de Sensibilidade (**justifique**):
- (i) Qual o valor ótimo e quais as soluções ótimas do modelo e de seu problema dual?
 - (ii) O que ocorre com o custo de 1kg da mistura, caso a exigência de Fibra passe para 23%?
 - (iii) Qual o custo de 1kg da mistura caso a exigência de Proteína suba para 10%?
 - (iv) Qual o custo de 1kg da mistura caso a exigência de Carboidrato caia para 47%?
 - (v) Qual o custo máximo da Soja para ainda garantir que seja usada na mistura?
 - (vi) O que aconteceria com a solução ótima caso o custo da Farinha de Cereais subisse para R\$7,00? E com o valor ótimo?
 - (vii) Qual deve ser o custo do Mel para que compense usá-lo na mistura? (Dica: use o custo relativo)
3. Uma fabricante de bebidas possui dois centros de produção: um em Ribeirão Preto-SP e outro em Cariacica-ES. A empresa deseja planejar qual a melhor forma de atender a demanda para a próxima semana, de mercados consumidores em três capitais: São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro. O custo unitário de se transportar 1 fardo de bebida de cada centro de produção a cada mercado consumidor é dado na tabela a seguir, juntamente com as demandas de cada mercado e as quantidades disponíveis em cada centro de produção:

Custos (R\$/unid)	SP	BH	RJ	Disponível
Ribeirão Preto	3,70	4,30	6,10	1100 unid
Cariacica	9,80	6,90	2,10	1800 unid
Demanda (unid)	960	510	895	

Deseja-se determinar como atender a demanda de cada mercado consumidor, minimizando os gastos totais com transporte.

- Elabore o modelo de otimização para auxiliar na tomada de decisão da empresa.
 - Escreva o problema dual do modelo elaborado no item (a).
 - Resolva o modelo do item (a) por um software de otimização e responda as questões a seguir usando **apenas** o Relatório de Sensibilidade (**justifique**):
 - Qual o valor ótimo e quais as soluções ótimas do modelo e de seu problema dual?
 - Se a empresa puder aumentar a capacidade de um dos centros de produção, qual ela deve escolher? Qual o impacto no custo total de transporte para cada fardo adicional neste centro?
 - Qual o impacto para o custo de transporte caso a demanda de SP aumente para 1000 fardos?
 - O que aconteceria com a solução ótima caso o custo de transporte entre Ribeirão Preto e SP subisse para R\$7,00? E com o valor ótimo?
 - Qual o custo máximo do trecho Cariacica – BH de modo que ainda compense usá-lo?
 - Qual deve ser o custo do trecho Cariacica – SP para que compense usá-lo?
 - Assumindo que todos os clientes paguem o mesmo preço pelo produto, qual o cliente mais rentável para a empresa?
4. Um empresário resolveu investir na venda de café pela Internet. Após comprar os grãos de um fornecedor, ele torra e moe o café para a venda. Três tipos de grãos podem ser comprados (A, B e C) e o empresário irá oferecer inicialmente dois produtos: Café Premium e Café Aroma. A diferença entre os produtos está na mistura dos grãos:
- Café Premium: 50% de grão A, 20% de grão B, 30% de grão C;
 - Café Aroma: 20% de grão A, 50% de grão B, 30% de grão C.

Os preços de venda dos produtos são R\$7,90/kg para o café Premium e R\$7,00/kg para o café Aroma. A oferta no fornecedor é de 100 kg do grão A a R\$8/kg, 100 kg do grão B a R\$6/kg, e 75 kg do grão C a R\$4/kg. O empresário deseja determinar quanto produzir de cada produto de modo a maximizar o lucro.

- Formule um modelo de programação linear para auxiliar na tomada de decisão do empresário e determine as soluções ótimas primal e dual **usando o método simplex**, passo-a-passo (você pode usar o Octave/Matlab para auxiliar nos cálculos).
- Usando **apenas** análise de sensibilidade **a partir da base ótima obtida pelo método simplex** no item anterior, responda os itens a seguir justificando suas respostas:
 - Como o lucro será afetado se apenas 90 kg do grão A estiver disponível?
 - Como o lucro será afetado apenas 80 kg do grão B estiver disponível?
 - Como o lucro será afetado apenas 50 kg do grão C estiver disponível?
 - O empresário deseja fazer uma liquidação do Café Premium. Qual deve ser o **lucro** mínimo deste produto para que a solução ótima não se altere?
 - Existe a possibilidade de se oferecer um novo produto, Café Bom, com a composição: 30% de grão A, 40% de grão B, 30% de grão C. Qual deve ser o **preço** mínimo de venda do Café Bom, de modo a ser viável produzi-lo?

5. A empresa TudoLimpo fabrica três tipos de amaciantes: super, extra e comum. O preço de venda por kg de amaciante super, extra e comum é de R\$ 5, R\$ 4 e R\$ 3, respectivamente. Cada produto requer 3 tipos de operações. Os tempos de processamento de cada operação por kg de amaciante super são 6, 3 e 4 minutos, respectivamente. Para o amaciante extra, são necessários 4, 6 e 10 minutos para cada operação. Já para o amaciante comum, são necessários 2, 3 e 4 minutos para cada operação. O tempo total disponível para cada operação é de 240, 180 e 200 minutos, respectivamente.
- (a) Elabore um modelo de programação linear para determinar quanto produzir de cada amaciante de modo a maximizar a receita total;
 - (b) Resolva o modelo do item (a) pelo método simplex, passo-a-passo, podendo usar o Octave/Matlab para realizar os cálculos;
 - (c) Usando **apenas** análise de sensibilidade **a partir da iteração ótima do método simplex** do item (b), responda os itens a seguir justificando suas respostas:
 - i. A empresa possui atualmente mão-de-obra excedente e deseja aumentar a capacidade de uma das operações (apenas uma será escolhida). Determine qual operação deve ter sua capacidade aumentada e para qual valor, de modo a se ter o maior aumento para o valor ótimo.
 - ii. A empresa deseja lançar um novo tipo de amaciante (*clean*). A fabricação do novo amaciante também requer as mesmas operações dos demais produtos. Os tempos de processamento de cada operação por kg de amaciante *clean* são 6, 2 e 7 minutos, respectivamente. Determine qual deve ser o preço mínimo do amaciante *clean* para que se compense produzi-lo?
 - iii. Qual o preço mínimo do amaciante *comum* para que ainda compense produzi-lo?
 - iv. Qual o preço mínimo do amaciante *extra* para que compense produzi-lo?
6. A empresa HiTech produz dois tipos de modelos de equipamentos eletrônicos, os quais utilizam resistores, capacitores e chips. Cada unidade do modelo 1 consome 2 resistores, 2 capacitores e nenhum chip, sendo vendida por R\$3,00. Já cada unidade do modelo 2 leva 3 resistores, 1 capacitor e 4 chips, sendo vendida por R\$4,00. No momento, estão disponíveis em estoque, 1200 resistores, 1000 capacitores e 800 chips. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo, de modo a maximizar a receita total. Responda às questões a seguir (**justificando**):
- (a) Elabore um modelo de programação linear para auxiliar na tomada de decisão da HiTech;
 - (b) Desenhe a região factível e o vetor gradiente, e determine a solução ótima e o valor ótimo do problema usando o método gráfico (indique esses elementos no gráfico e apresente os cálculos realizados durante a resolução);
 - (c) Determine a solução ótima e o valor ótimo do problema usando o método simplex. Apresente todos os cálculos e justifique cada passo de sua resposta;
 - (d) Relacione as soluções básicas de cada iteração do método simplex com pontos do gráfico do item (2);
 - (e) Obtenha o problema dual por meio da **interpretação econômica** do problema, descrevendo passo-a-passo a obtenção de cada variável e restrição em sua discussão;
 - (f) Qual a solução ótima dual e o valor ótimo do problema dual?
 - (g) A partir da iteração ótima do método simplex obtida no item (c), crie uma tabela de Análise de Sensibilidade para mudanças no *vetor de recursos*, similar a que é gerada pelo MS Excel, incluindo: Valor Final, Preço Sombra, Permitido Aumentar e Permitido Reduzir. **Interprete a tabela obtida**;
 - (h) A partir da iteração ótima do método simplex obtida no item (c), crie uma tabela de Análise de Sensibilidade para mudanças nos *coeficientes da função objetivo*, similar a que é gerada pelo MS Excel, incluindo: Valor Final, Custo Reduzido, Coeficiente Objetivo, Permitido Aumentar, e Permitido Reduzir. **Interprete a tabela obtida**;

- (i) Usando apenas Análise de Sensibilidade, determine o valor ótimo caso a disponibilidade de chips seja reduzida para 350 unidades;
- (j) Usando apenas Análise de Sensibilidade, determine o valor ótimo caso a disponibilidade de resistores seja aumentada para 1300 unidades;
- (k) Usando apenas Análise de Sensibilidade, determine qual o menor preço para o modelo 1, de modo a garantir que ele ainda seja produzido na solução ótima.
- (l) Usando apenas Análise de Sensibilidade, responda: Um novo fornecedor está propondo vender à HiTech resistores adicionais a 40 centavos cada, mas só se a HiTech comprar no mínimo 500 unidades. A HiTech deve aceitar a proposta? Justifique.